2016年度Aセメスター　電磁気学B（担当：加藤雄介）
レポート問題I 解答例 2016.11.30 (文責：福井)

第1問

参考のためにベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を図1に示す．矢印の向きと大きさは，それぞれその点でのベクトルの向きと大きさを表す．

以下, 1. 媒介変数を用いる方法 と 2. x について直接計算する方法 の2種類の計算法を紹介する．

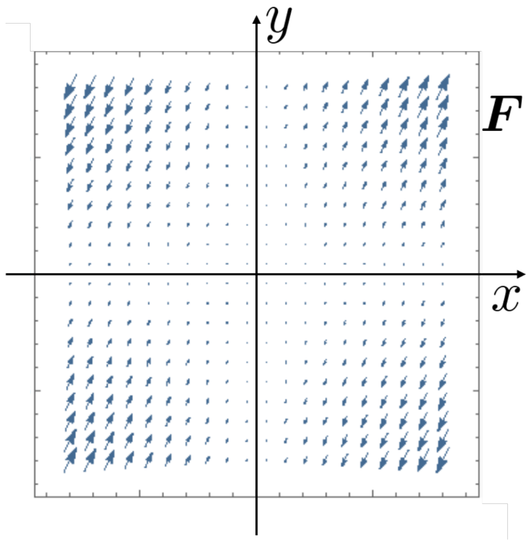

図 1: ベクトル場 $\boldsymbol{F}$

1. 媒介変数を用いる方法

点Pの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$, 点Qの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とすると積分路 Γ_3 は媒介変数 t $(0 \leq t \leq 1)$ を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + t(\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) && (1) \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} && (2) \\ &= \begin{pmatrix} a(2t+1) \\ b(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} && (3) \end{aligned}$$

と表すことができる．これを t で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる．また, $\boldsymbol{F}$ も t を用いて

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} kx(t)y(t) \\ 2kx(t)y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kab(2t+1)(t+1) \\ 2kab(2t+1)(t+1) \end{pmatrix} \tag{5}$$

と表せる．以上より

$$\int_{\Gamma_3} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = \int_0^1 \mathrm{d}t\ \boldsymbol{F}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

$$= kab \int_0^1 \mathrm{d}t\ \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (2t+1)(t+1) \\ 2(2t+1)(t+1) \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= 2kab(a+b) \int_0^1 \mathrm{d}t\ (2t^2 + 3t + 1) \tag{8}$$

$$= \frac{19}{3} kab(a+b) \tag{9}$$

と計算できる．

2. x について直接計算する方法

積分路 Γ_3 の式は

$$y = \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2} \quad (a \leq x \leq 3a) \tag{10}$$

であり，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{2a} \tag{11}$$

である．これらを用いると

$$\int_{\Gamma_3} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_a^{3a} \mathrm{d}x\ kxy + \int_b^{2b} \mathrm{d}y\ 2kxy \tag{12}$$

$$= \int_a^{3a} \mathrm{d}x\ \left[kxy(x) + 2kxy(x) \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \right] \tag{13}$$

$$= \int_a^{3a} \mathrm{d}x\ \left[\frac{kbx}{2} \left(\frac{x}{a} + 1 \right) + \frac{kb^2 x}{2a} \left(\frac{x}{a} + 1 \right) \right] \tag{14}$$

$$= \frac{kb}{2a}(a+b) \int_a^{3a} \mathrm{d}x\ \left(\frac{x^2}{a} + x \right) \tag{15}$$

$$= \frac{kb}{2a}(a+b) \times \frac{38}{3} a^2 \tag{16}$$

$$= \frac{19}{3} kab(a+b) \tag{17}$$

となる．ここでは x についての積分を行ったが，y についての積分にしても同様に実行できる．

第 2 問

リングに電荷 Q が一様に分布しているので電荷線密度 (単位長さ当たりの電荷) は

$$\frac{Q}{2\pi a} \tag{18}$$

である．微小領域 i の長さは $a(\theta_{i+1} - \theta_i)$ なので，微小領域 i の電荷は

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} Q \equiv \frac{\Delta\theta_i}{2\pi} Q \tag{19}$$

である．また, 点 P の座標は $(x,0,0)$, リング状の θ_i の座標は $(0,a\cos\theta_i,a\sin\theta_i)$ なので, 微小領域 i から点 P への方向ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\begin{pmatrix}x\\-a\cos\theta_i\\-a\sin\theta_i\end{pmatrix}\tag{20}$$

である．微小領域 i の電荷が点 P に作る電場は Coulomb 則より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta\theta_i}{2\pi}\frac{1}{a^2+x^2}\boldsymbol{e}_i&(21)\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta\theta_i}{2\pi}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\-a\cos\theta_i\\-a\sin\theta_i\end{pmatrix}&(22)\end{aligned}$$

である．よって, 微小領域についての和をとると

$$\sum_i\boldsymbol{E}_i=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\sum_i\frac{\Delta\theta_i}{2\pi}\begin{pmatrix}x\\-a\cos\theta_i\\-a\sin\theta_i\end{pmatrix}\tag{23}$$

であり, 十分細かく分割した極限をとると区分求積法より

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{Max}\Delta\theta_i\to0}\sum_i\boldsymbol{E}_i&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\begin{pmatrix}x\\-a\cos\theta\\-a\sin\theta\end{pmatrix}&(24)\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x&(25)\end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{e}_x$ は x 方向の単位ベクトルである．つまり, x 方向成分のみ残る．y, z 方向成分は角度 θ と $\theta+\pi$ のつくる電場は逆向き同じ大きさなので打ち消し合い, 合計はゼロになる．このことを用いて, x 方向成分のみ求めてもよい．

第 3 問

電荷面密度が σ なので, i 番目のリングの電荷は $(r_{i+1}-r_i\equiv\Delta r_i)$

$$\begin{aligned}\sigma(\pi r_{i+1}^2-\pi r_i^2)&=\pi\sigma(r_{i+1}^2-r_i^2)&(26)\\&=\pi\sigma((r_i+\Delta r_i)^2-r_i^2)&(27)\\&=\pi\sigma(2r_i\Delta r_i+\Delta r_i^2)&(28)\end{aligned}$$

である．i 番目のリングが点 P に作る電場は第 2 問より

$$\boldsymbol{E}_i=\frac{\pi\sigma(2r_i\Delta r_i+\Delta r_i^2)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+r_i^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x\tag{29}$$

よって,

$$\sum_i\boldsymbol{E}_i=\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sum_i\frac{x}{(x^2+r_i^2)^{3/2}}r_i\Delta r_i+\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sum_i\frac{x}{(x^2+r_i^2)^{3/2}}\Delta r_i^2\right]\boldsymbol{e}_x\tag{30}$$

であり, 十分細かく分割した極限で区分求積法より

$$\boldsymbol{E} = \lim_{\mathrm{Max}\to\Delta r_i} \sum_i \boldsymbol{E}_i = \left[\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^a \mathrm{d}r\ \frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\right]\boldsymbol{e}_x \tag{31}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(x^2+r^2)^{1/2}}\right]_0^a \boldsymbol{e}_x \tag{32}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{(x^2+r^2)^{1/2}}\right]\boldsymbol{e}_x \tag{33}$$

である. 根号から出すときに x の符号に注意. ここで, 区分求積法において高次の微小量 Δr_i^2 の項はゼロになることを用いた.
$a \to 0$ の極限で第 2 項は消えるので

$$\lim_{a\to\infty} \boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x & (x > 0) \\ \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x & (x < 0) \end{cases} \tag{34}$$

が無限平面に一様に分布する電荷の作る電場である.