電磁気学 A レポート問題 (1) 解答・解説

TA：穴釜 剛

2010 年 12 月 14 日

1　解答

第 1 問

1　z 軸を中心軸とした、半径 ρ, 長さ l の円柱を考え、その表面上で Gauss の法則を用いる。

(i) $b \leq \rho$

$$2\pi\rho E(\rho) \times l = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi(b^2 - a^2)\sigma \times l \tag{1}$$

(ii) $a \leq \rho < b$

$$2\pi\rho E(\rho) \times l = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi(\rho^2 - a^2)\sigma \times l \tag{2}$$

(iii) $\rho < a$

$$2\pi\rho E(\rho) \times l = 0 \tag{3}$$

以上より、求める電場は

$$E(\rho) = \begin{cases} \dfrac{(b^2 - a^2)\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{\rho} & (b \leq \rho) \\ \dfrac{(\rho^2 - a^2)\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{\rho} & (a \leq \rho < b) \\ 0 & (\rho < a) \end{cases} \tag{4}$$

となる。

2　図 (1) に示すように、P_0 を z 軸の原点とおき、PP_0 を通る直線を ρ 軸とする。また、z, ρ 軸に垂直な軸を y 軸とする。

[ρ 方向成分しか存在しないことの証明]

(i)P_0 が P に作る電場は、ρ 方向を向く。(ii)P_0 を除く円筒内の任意の点 (点を含む微小体積) を $Q(\Delta V_Q)$ とおくと、円筒は無限に長いので、任意の点 Q について、PP_0 に対して対称な点 Q' が存在する。Coulomb の法則によると、Q, Q' が P に作る電場は大きさが同じ E で、方向は $\overrightarrow{QP} = (z_0, y_0, \rho_0), \overrightarrow{Q'P} = (-z_0, -y_0, \rho_0)$ であるが、これらは ρ 方向の成分以外は打ち消しあう $(E(z_0, y_0, \rho_0) + E(-z_0, -y_0, \rho_0) = 2E(0, 0, \rho_0))$。$Q$ は任意の点であったので、点 P における電場に寄与する全ての点で同様の議論が出来る。以上より、点 P における電場は ρ 方向の成分しか持たない。

[電場の大きさが ρ にしか依存しないことの証明]

P から ρ 成分以外を平行移動した P' における電場を考える。無限に長い円筒を考えている為、点 P' における電場に寄与する全ての点からの寄与の和は P のそれと同じである。よって、電場の大きさは ρ にしか依存しない。

以上から電場を (1) のようにおくことが出来る。

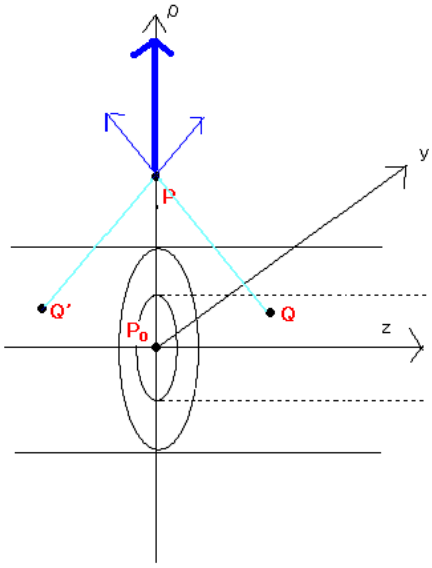

図 1　青色の線が電場を表している。

3　電位の定義より、基準点を原点にとると[*1]、任意の点 Q における電位 $\phi_Q(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi_Q(\boldsymbol{r}) = -\int_{O(\text{原点})}^{Q} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^{\rho_Q} E(\rho) d\rho \tag{5}$$

と表せる。ただし、ρ_Q は点 Q の ρ 座標である。二つ目の等式は、電場と微小距離 $d\boldsymbol{r}$ の内積は、ρ 方向の成分以外 0 になることによる。したがって、$\phi_Q(\boldsymbol{r})$ は ρ_Q のみの関数である。Q は任意の点であったので、$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(\rho)$ と、電位は ρ のみの関数で書ける。

4　3 より、電位 ϕ は ρ の関数であることが示されたので、ρ の値によって場合分けして計算を行う。
(i) $b \leq \rho$

$$\begin{aligned}
\phi(\rho) - \phi(a) &= -\int_a^{\rho} \boldsymbol{E}(\rho) \cdot d\vec{r} \\
&= -\int_b^{\rho} \frac{(b^2 - a^2)\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\rho'} d\rho' - \int_a^{b} \frac{(\rho'^2 - a^2)\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\rho'} d\rho' \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ -(b^2 - a^2) \left[\ln \frac{\rho}{b} + \frac{1}{2} \right] + a^2 \ln \frac{b}{a} \right\}
\end{aligned} \tag{6}$$

(ii) $a \leq \rho < b$

$$\begin{aligned}
\phi(\rho) - \phi(a) &= -\int_a^{\rho} \frac{(\rho'^2 - a^2)\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\rho'} d\rho' \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[a^2 \ln \frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{2} \right]
\end{aligned} \tag{7}$$

[*1] 今回は、電位の基準点を ∞ にとることは出来ない。無限大における電位は発散してしまうからである。

(iii) $a > \rho$

$$\phi(\rho) - \phi(a) = 0 \tag{8}$$

となる。

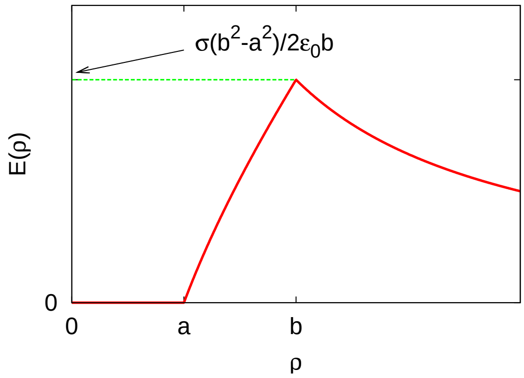

図 2　(12) を plot したもの。

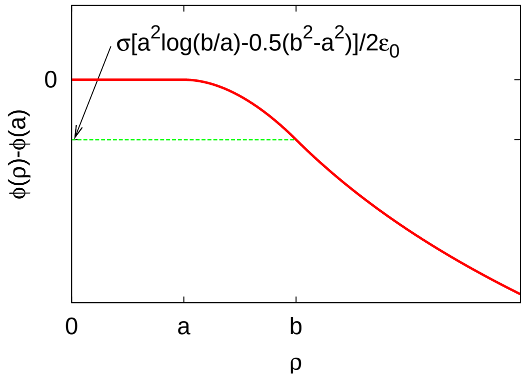

図 3　(6)、(7)、(8) を plot したもの。

第 2 問

1　図 (4) に示すように、任意の点 $P(\boldsymbol{r})$ における電場を、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と置く。(i)P を通る $z=0$ 面に対する垂線と $z=0$ 面との交点を P' とおく。Coulomb の法則により、P' が P に作る電場は z 方向成分しか持たない。(ii)$z=0$ 面上の P' を除く任意の点を Q と置く。$z=0$ 平面は無限に大きいので Q の P' と点対称にある点を Q' が必ず存在する。Q, Q' が P に作る電場は大きさが同じで、方向は $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{Q'P}$ であるが、これらは明らかに z 方向の成分以外は打ち消しあう。以上から、$z=0$ 面上の全ての点からの P における電場の寄与は、z 方向しか持たない。したがって、電場は z 成分しか持たない (P は任意の点なので $z>0, z<0$ の両方の場合の議論を含んでいる。)[*2]。

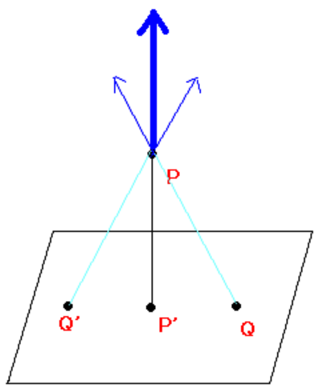

図 4　青色の線が電場を表している。

[*2] また、問 1(2) と同じ用に、P の平行移動を考えることで、電場の大きさが z のみに依存することも分かる。

2 任意の点 Q における電場を、Q の z 座標 z を用いて $E(z)\boldsymbol{e}_z$ と置く。ただし、$\boldsymbol{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである。$z = 0$ のときは、平面が Q に作る電場は z 成分を持たないため、$E(0) = 0$ である。$z > 0$ の場合、点 Q を中心とした、z 平面と垂直な半径 r の円を含み、z 軸を横切るような、高さ $2z$ の円柱を用意し、その円柱上で Gauss の法則を用いると

$$E(z) \times 2 \times \pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\pi r^2 \tag{9}$$

となる。したがって

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (z > 0) \tag{10}$$

となる。また、$z > 0$ の場合同様に考えて

$$E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (z < 0) \tag{11}$$

となる。以上より求める電場は

$$E(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (z > 0) \\ 0 & (z = 0) \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (z < 0) \end{cases} \tag{12}$$

となる[*3]。

[*3] この問題は、あくまでも理想的な理論であることを忘れてはいけない。現実の固体では、原子が規則正しく離散的に配置されていることからも分かるように、厳密に $z = 0$ の平面に電荷が連続分布しているという状況は存在し得ない。$z = 0$ とそれ以外で電場が非連続的になっているという不思議な解も、このような「無限」を用いた理想的なモデルだから生じたものである。このことからも、無限という概念は、現実の物理を考える際には、注意深く扱わなくてはならないことが良く分かる。

2 講評

木曜クラス・金曜クラス共に A の人がほとんどいないという、非常に残念な結果になってしまった。難しい計算を必要としていない基本的な問題ばかりだったので、よく復習をして欲しい。また、人に読ませる答案を作ることを心がけて欲しい。定義していない文字をいきなり使用したり、明瞭に書かれていない図を指して「図より」と書かれているものは、採点者に読ませようと言う意思が感じられなかった。レポートである以上、論理を明確にして、採点者に伝わるように書くことを意識して欲しい。

残念なことに、明らかに人の解答をそのまま劣化コピーして写しただけと判断される答案用紙が多数見受けられた (木曜クラス)。中には「相談者:○○君」と書いていたが○○君の答案をそのまま写したとしか見えないケースもあった。友人との議論は歓迎しているが、「友人に答案を見せてもらうこと」は議論ではないことに注意して欲しい。明らかに写しただけと判断できる答案は、元の答案の論理や計算のミスをそのまま引き摺っている。レポート問題は、自分で作った解答の精度を確かめることで初めて意味があるのであって、写すくらいなら出す必要は無いと考えられる。

2.1 採点基準

採点基準は、考え方・計算共に合っている場合○、考え方は (概ね) あっているが計算は間違っている場合△、考え方が合っていない、もしくは考え方はあっているものの、計算がまったくできていない、計算、単位両方にミスがある場合などは×とした。

評価は
A…×がなし。
B…考え方の間違いが一つ以内で、計算ミス等が少ない場合。
C…それ以下。(あまりに×ばっかりだと D)
D…(評定なし) 未提出・遅れ・ほぼすべて間違っている・など
とした。

2.2 各設問について

問 1-1

Gauss の法則を用いた解答を期待していたが、Coulomb の法則を用いて計算している例もあった。Coulomb の法則を用いた答案の多くは、答えまでたどり着いていなかったが、中にはしっかりと積分計算を行い、解答に辿り着いていた優秀な答案もあった。尚、この問題は答えだけしか書かれていない答案も多かったが、×とした (その他の設問も同様である。)。

問 1-2

無限系故に、任意の点 Q に対して PP_0 に対して対称な点 Q' が「必ず存在すること」が肝であるが、それをきちんと述べた回答は非常に少なかった。1 同様 Coulomb の法則を用いて直接電場を求めた答案もあったが、そこまでしなくても、解答の論法で簡単に示せる。ポイントがどこかを抑えた解答を心がけて欲しい。

問 1-3

数式を用いて、きちんと示している答案は非常に少なかった。基準点や、経路によらないことを明確にせず

「電位はこのように書けるので・・・」と書かれた答案が非常に多かったが、それらは×である。

問 1-4

符号ミスが非常に多かった。定義は調べれば分かるので、そのようなミスは極力減らしましょう。また、領域を考慮しないで積分してしまうミスも多かった。高校数学のレベルの問題なので、この程度の計算は間違えないように注意して欲しい。

問 2-1

本質的には問 1-2 と同じ問題であるが、こちらの方が分かりやすいためか、教科書の定番問題であるためか、出来が良かった。

問 2-2

z の領域を分けた答案が非常に少なかった。