2018 年度多体系の理論, 第 12 回講義資料 v1.2018.12.18 v2. 2019.1.13 (非従来型超伝導体における表面束縛状態)

加藤雄介

2019 年 1 月 15 日

1 chiral p 波超伝導体の BdG 方程式

天下りだが、等方的な 2 次元フェルミ面を持つ超伝導体に対する以下の Bogoliubov-deGennes (BdG) 方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} h & -\frac{\Delta}{k_{\mathrm{F}}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ +\frac{\Delta^*}{k_{\mathrm{F}}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) & -h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\epsilon\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

磁場の効果は無視し、一体ハミルトニアン h は実演算子であるとした。以下に示す空間的に一様な系での平面波解から、上記の方程式が p 波超伝導を表すことがわかる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\frac{e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{\Omega}}\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_k & -\mathrm{i}\frac{\Delta}{k_{\mathrm{F}}}(k_x-\mathrm{i}k_y) \\ \mathrm{i}\frac{\Delta^*}{k_{\mathrm{F}}}(k_x+\mathrm{i}k_y) & -\xi_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}=\epsilon\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

記号

$$\Delta=|\Delta_k|e^{\mathrm{i}\theta},\quad |\Delta_k|=\frac{|\Delta|k}{k_{\mathrm{F}}},\quad e^{\mathrm{i}\alpha}=\frac{k_x+\mathrm{i}k_y}{k},\quad k=\sqrt{k_x^2+k_y^2} \tag{4}$$

これらを用いて (3) を書き直し、

$$\begin{pmatrix} \xi_k & -\mathrm{i}|\Delta_k|e^{\mathrm{i}(\theta-\alpha)} \\ \mathrm{i}|\Delta_k|e^{\mathrm{i}(\alpha-\theta)} & -\xi_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}=\epsilon\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

を得る。

$$\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\bar{u}_{\boldsymbol{k}} \\ e^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\bar{v}_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

とゲージ変換すると

$$\begin{pmatrix} \xi_k & |\Delta_k| \\ |\Delta_k| & -\xi_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u}_{\boldsymbol{k}} \\ \bar{v}_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}=\epsilon\begin{pmatrix} \bar{u}_{\boldsymbol{k}} \\ \bar{v}_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

この固有値方程式の解のうち、正の固有値を持つものは、

$$\epsilon=\sqrt{\xi_k^2+\Delta_k^2}=\epsilon_k,\quad \begin{pmatrix} \bar{u}_{\boldsymbol{k}} \\ \bar{v}_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi_k}{\epsilon_k}\right)} \\ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi_k}{\epsilon_k}\right)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

凝縮体波動関数のフーリエ変換 $F_{\boldsymbol{k}} = u^*_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}}$ は

$$F_{\boldsymbol{k}} = \frac{\mathrm{i}|\Delta_k|^2}{2\epsilon_k^2} \frac{k_x + \mathrm{i}k_y}{k} \tag{9}$$

となるので、これは軌道角運動量 $L_z = \hbar$ の p 波超伝導を表す（カイラル P 波という）。

2　カイラル p 波の表面束縛状態

$x > 0$ を占めるカイラル p 波超伝導体でエネルギーギャップ ($|\Delta_k|$) よりも小さい励起エネルギーを持つ解を探す。BdG 方程式の波動関数 u, v は y によらず x にのみ依存するものとし、

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^{\mathrm{i}(k+\mathrm{i}\kappa)x} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{10}$$

とおく。k は実波数 ($|k| \sim k_{\mathrm{F}}$)、κ は正であるとする。u_k, v_k が満たす方程式は

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m}(k+\mathrm{i}\kappa)^2 - \mu & -\mathrm{i}\frac{k+\mathrm{i}\kappa}{k_{\mathrm{F}}}\Delta \\ \mathrm{i}\frac{k+\mathrm{i}\kappa}{k_{\mathrm{F}}}\Delta^* & -\frac{\hbar^2}{2m}(k+\mathrm{i}\kappa)^2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{11}$$

この固有値問題の特性方程式は

$$\begin{aligned} &\epsilon^2 - \left(\frac{\hbar^2(k^2-\kappa^2)}{2m} - \mu + \frac{\mathrm{i}\hbar^2 k\kappa}{m} \right)^2 - \frac{|\Delta|^2(k^2-\kappa^2)}{k_{\mathrm{F}}^2} - \frac{\mathrm{i}2|\Delta|^2 k\kappa}{k_{\mathrm{F}}^2} \\ &= \epsilon^2 - \left(\frac{\hbar^2(k^2-\kappa^2)}{2m} - \mu \right)^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)\left(\frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} \right) - \frac{|\Delta|^2(k^2-\kappa^2)}{k_{\mathrm{F}}^2} + \mathrm{i}\frac{\hbar^2 k\kappa}{m}\left[\frac{|\Delta|^2}{\mu} - \frac{\hbar^2 k^2}{m} + \frac{\hbar^2\kappa^2}{m} + 2\mu \right] = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

で与えられる。左辺の虚部はゼロであることから、

$$\frac{\hbar^2\kappa^2}{m} = \frac{\hbar^2 k^2}{m} + \frac{|\Delta|^2}{\mu} - 2\mu \tag{13}$$

を得る。これを (12) の左辺の実部 (これもゼロである) に代入し、κ を消去すると k^2 についての 2 次方程式

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)^2 - 2\left(\mu - \frac{|\Delta|^2}{\mu} \right)\left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} \right) + \epsilon^2 - |\Delta|^2 + \frac{|\Delta|^4}{4\mu^2} = 0 \tag{14}$$

を得る。これを解いて

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} = \mu - \frac{|\Delta|^2}{2\mu} \pm (\mu^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

これを (13) に代入して

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} = \left(\frac{|\Delta|^2}{2\mu} - \mu \pm (\mu^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{16}$$

を得る。$|\Delta| \ll \mu$ なので、この複号は上符号をとる、すなわち

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} = \mu - \frac{|\Delta|^2}{2\mu} + (\mu^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} = \left(\frac{|\Delta|^2}{2\mu} - \mu + (\mu^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{17}$$

となる。これらの表式は第二式の右辺が正になる

$$\epsilon \leq \left(|\Delta|^2 - \frac{|\Delta|^4}{4\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

のときに正しい。(17) より

$$\frac{\hbar^2|k|\kappa}{m}=\left(|\Delta|^2-\epsilon^2-\frac{|\Delta|^4}{4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

$$\frac{|k|}{k_{\mathrm{F}}}=\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\Delta|^2}{2\mu^2}+\left(1-\frac{\epsilon^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\sim 1,\quad \frac{\kappa}{k_{\mathrm{F}}}=\left(\frac{|\Delta|^2}{4\mu^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\epsilon^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\sim O(|\Delta|^2/\mu^2) \tag{20}$$

固有値方程式は

$$\begin{pmatrix} -\frac{|\Delta|^2}{2\mu}+\mathrm{isgn}(k)\left(|\Delta|^2-\epsilon^2-\frac{|\Delta|^4}{4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\epsilon & -\mathrm{i}\frac{k+\mathrm{i}\kappa}{k_{\mathrm{F}}}\Delta \\ \mathrm{i}\frac{k+\mathrm{i}\kappa}{k_{\mathrm{F}}}\Delta^* & \frac{|\Delta|^2}{2\mu}-\mathrm{isgn}(k)\left(|\Delta|^2-\epsilon^2-\frac{|\Delta|^4}{4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}=0 \tag{21}$$

これを $k/k_{\mathrm{F}}\sim\mathrm{sgn}(k)$, $\kappa/k_{\mathrm{F}}\sim 0$, $\frac{|\Delta|^2}{2\mu}\sim 0$ とおくと *

$$\begin{pmatrix} \mathrm{isgn}(k)\left(|\Delta|^2-\epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}-\epsilon & -\underline{\mathrm{isgn}(k)}\Delta \\ \underline{\mathrm{isgn}(k)}\Delta^* & -\mathrm{isgn}(k)\left(|\Delta|^2-\epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}-\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}=0 \tag{22}$$

これは s-wave のとき固有値問題と波線部を除いて一致している．$\epsilon/|\Delta|=\cos\phi$、$\Delta=|\Delta|e^{\mathrm{i}\theta}$ とすると

$$\begin{pmatrix} -e^{\mp\mathrm{i}\varphi} & \mp e^{\mathrm{i}(\theta+\pi/2)} \\ \mp e^{-\mathrm{i}(\theta+\pi/2)} & -e^{\pm\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}=0 \tag{23}$$

(上符号が $k>0$ 　下符号が $k<0$). 一度位相変換

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{u}_k e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ \bar{v}_k e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \end{pmatrix} \tag{24}$$

をして固有値問題を

$$\begin{pmatrix} -e^{\mp\mathrm{i}\varphi} & \mp 1 \\ \mp 1 & -e^{\pm\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{pmatrix}=0 \tag{25}$$

(上符号が $k>0$ 　下符号が $k<0$) と書きなおすとこの固有関数は

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}\quad k>0,\quad \begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}\quad k<0, \tag{26}$$

となる。両者は $\epsilon>0$ では線形独立だが、$\epsilon=0$ では $\varphi=\pi/2$ のため縮退する。よって

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}=c_1 e^{\mathrm{i}|k|x-\kappa x}\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ -e^{-\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \end{pmatrix}+c_2 e^{-\mathrm{i}|k|x-\kappa x}\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ e^{\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \end{pmatrix} \tag{27}$$

はエネルギー $\epsilon=0$ のとき $c_2=-c_1$ とすれば固定端の境界条件 $u(x=0)=v(x=0)=0$ を満たすことが可能である。

追記（2019.1.13）

(21) はその次の行に書かれた近似*を用いずにゼロ固有値を持ち、固定端の境界条件を満たす非自明な解があることが示せる。$\epsilon=0$ のとき

$$\frac{|k|}{k_{\mathrm{F}}}=\left(1-\frac{|\tilde{\Delta}|^2}{4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\kappa}{k_{\mathrm{F}}}=\frac{|\tilde{\Delta}|}{2} \tag{28}$$

ただし $\tilde{\Delta} = \Delta/\mu$ とした。このとき固有値方程式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{\mathrm{i}\theta} \\ e^{-\mathrm{i}\theta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = 0 \tag{29}$$

と単純な形になる。よって

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = (c_1 e^{\mathrm{i}|k|x - \kappa x} + c_2 e^{-\mathrm{i}|k|x - \kappa x}) \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \\ e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \tag{30}$$

となるので、$c_2 = -c_1$ とすれば固定端の境界条件 $u(x=0) = v(x=0) = 0$ を満たすことが可能である。

3　2 次元 d 波超伝導体の BdG 方程式

次の BdG 方程式を用いて 2 次元 d 波超伝導体を考える。

$$\begin{pmatrix} h & \frac{\Delta}{k_{\mathrm{F}}^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\Delta^*}{k_{\mathrm{F}}^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{31}$$

4　d 波の表面束縛状態

$x > 0$ を占める 2 次元 d 波超伝導体でエネルギーギャップよりも小さい励起エネルギーを持つ解を探す。BdG 方程式の波動関数 u, v は y については平面波、x については減衰振動型の空間依存性を持つものとし

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^{\mathrm{i}(k+\mathrm{i}\kappa)x + \mathrm{i}qy} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{32}$$

とおく。k, q は実波数とし、正の実数 κ は波動関数の空間的な減衰率を表す。$\Delta = |\Delta|e^{\mathrm{i}\theta}$ は $x > 0$ で一定、$x < 0$ ではゼロとする。u_k, v_k が満たす方程式は

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m}((k+\mathrm{i}\kappa)^2 + q^2) - \mu & -\frac{\Delta(k+\mathrm{i}\kappa)q}{k_{\mathrm{F}}^2} \\ -\frac{(k+\mathrm{i}\kappa)q}{k_{\mathrm{F}}^2}\Delta^* & -\frac{\hbar^2}{2m}((k+\mathrm{i}\kappa)^2 + q^2) + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{33}$$

この固有値問題の特性方程式は

$$\epsilon^2 - \left(\frac{\hbar^2(k^2 - \kappa^2 + q^2)}{2m} - \mu\right)^2 + \left(\frac{\hbar^2 k\kappa}{m}\right)^2 - \frac{|\Delta|^2(k^2 - \kappa^2)q^2}{k_{\mathrm{F}}^4} - 2\mathrm{i}k\kappa\left[\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - \kappa^2 + q^2) - \mu\right) + \frac{|\Delta|^2 q^2}{k_{\mathrm{F}}^4}\right] = 0 \tag{34}$$

で与えられる。無次元変数 $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\mu, \quad \tilde{\Delta} = \Delta/\mu, \quad \tilde{q} = q/k_{\mathrm{F}}, \quad \tilde{k} = k/k_{\mathrm{F}}, \quad \kappa = \tilde{\kappa}/k_{\mathrm{F}}$ を用いて上式を

$$\tilde{\epsilon}^2 - \left(\tilde{k}^2 - \tilde{\kappa}^2 + \tilde{q}^2 - 1\right)^2 + \left(2\tilde{k}\tilde{\kappa}\right)^2 - |\tilde{\Delta}|^2(\tilde{k}^2 - \tilde{\kappa}^2)\tilde{q}^2 - \mathrm{i}4\tilde{k}\tilde{\kappa}\left[\tilde{k}^2 - \tilde{\kappa}^2 + \tilde{q}^2 - 1 + \frac{|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{2}\right] = 0 \tag{35}$$

とあらわす。 左辺の虚部はゼロであることから、

$$\tilde{k}^2 - \tilde{\kappa}^2 = 1 - \tilde{q}^2 - \frac{|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{2} \equiv f_1(\tilde{\Delta}, \tilde{q}) \tag{36}$$

を得る。これを (35) の左辺の実部 (これもゼロである) に代入し、$\tilde{k}^2-\tilde{\kappa}^2$ を消去し、

$$\tilde{\epsilon}^2-f_2(\tilde{\Delta},\tilde{q})+(2\tilde{k}\tilde{\kappa})^2=0 \quad f_2(\tilde{\Delta},\tilde{q})=|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2(1-\tilde{q}^2-\frac{|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{4}) \tag{37}$$

を得る。(36) と (37) を $\tilde{k}$ と $\tilde{\kappa}$ について解き

$$\tilde{k}=\pm\sqrt{\frac{f_1(\tilde{\Delta},\tilde{q})+f_3(\tilde{\Delta},\tilde{q},\tilde{\epsilon})}{2}}\equiv\pm\tilde{k}(\tilde{\epsilon}), \quad f_3(\tilde{\Delta},\tilde{q})=\sqrt{f_1(\tilde{\Delta},\tilde{q})^2+f_2(\tilde{\Delta},\tilde{q})-\tilde{\epsilon}^2}=\sqrt{(1-\tilde{q}^2)^2-\tilde{\epsilon}^2} \tag{38}$$

$$\tilde{\kappa}=\sqrt{\frac{f_2(\tilde{\Delta},\tilde{q})-\tilde{\epsilon}^2}{2(f_1(\tilde{\Delta},\tilde{q})+f_3(\tilde{\Delta},\tilde{q},\tilde{\epsilon}))}}\equiv\tilde{\kappa}(\tilde{\epsilon}) \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}u_k\\v_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\tilde{\Delta}|\tilde{q}e^{\mathrm{i}\theta}(\pm\tilde{k}(\tilde{\epsilon})+\mathrm{i}\tilde{\kappa}(\tilde{\epsilon}))\\ \pm\sqrt{f_2-\tilde{\epsilon}^2}+\frac{\mathrm{i}|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{2}-\tilde{\epsilon}\end{pmatrix} \tag{41}$$

(上符号が $k>0$ 　下符号が $k<0$). ここで $\epsilon=0$ とおくと

$$|\tilde{k}|=\sqrt{1-\tilde{q}^2-\frac{|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{4}} \quad \tilde{\kappa}=\frac{|\tilde{\Delta}||\tilde{q}|}{2}, \quad \sqrt{f_2(\tilde{\Delta},\tilde{q})}=|\tilde{\Delta}||\tilde{q}|\sqrt{1-\tilde{q}^2-\frac{|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{4}} \tag{42}$$

より

$$\begin{pmatrix}\bar{u}_k\\ \bar{v}_k\end{pmatrix}=|\tilde{\Delta}||\tilde{q}|\left(\pm\sqrt{1-\tilde{q}^2-\frac{|\tilde{\Delta}|^2\tilde{q}^2}{4}}+\mathrm{i}\frac{|\tilde{\Delta}||\tilde{q}|}{2}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(q)e^{\mathrm{i}\theta}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\propto\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(q)e^{\mathrm{i}\theta}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{43}$$

となる。よって

$$\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}=(c_1e^{\mathrm{i}k(q)x}+c_2e^{-\mathrm{i}k(q)x})e^{-(|\Delta|/2\mu)|q|x+\mathrm{i}qy}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(q)e^{\mathrm{i}\theta}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}, \quad k(q)=\sqrt{k_\mathrm{F}^2-q^2-\frac{|\Delta|^2q^2}{4\mu^2}} \tag{44}$$

は $c_2=-c_1$ とすれば固定端の境界条件 $u(x=0)=v(x=0)=0$ を満たすゼロエネルギー状態である。
$|q|<\left(1+\frac{|\Delta|^2}{4\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}k_\mathrm{F}$ のとき x 方向に減衰振動するゼロエネルギー解

$$\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}=\sin[k(q)x]e^{-(|\Delta|/2\mu)|q|x+\mathrm{i}qy}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(q)e^{\mathrm{i}\theta}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}, \quad k(q)=\sqrt{k_\mathrm{F}^2-q^2-\frac{|\Delta|^2q^2}{4\mu^2}} \tag{45}$$

が存在する。
$|q|=\left(1+\frac{|\Delta|^2}{4\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}k_\mathrm{F}$ のとき x 方向に臨界減衰するゼロエネルギー解

$$\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}=xe^{-(|\Delta|/2\mu)|q|x+\mathrm{i}qy}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(q)e^{\mathrm{i}\theta}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{46}$$

が存在する。
$\left(1+\frac{|\Delta|^2}{4\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}k_\mathrm{F}<|q|<k_\mathrm{F}$ のとき x 方向に過減衰するゼロエネルギー解

$$\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}=\sinh[\mathrm{Im}(k(q))x]e^{-(|\Delta|/2\mu)|q|x+\mathrm{i}qy}\begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(q)e^{\mathrm{i}\theta}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{47}$$

が存在する。