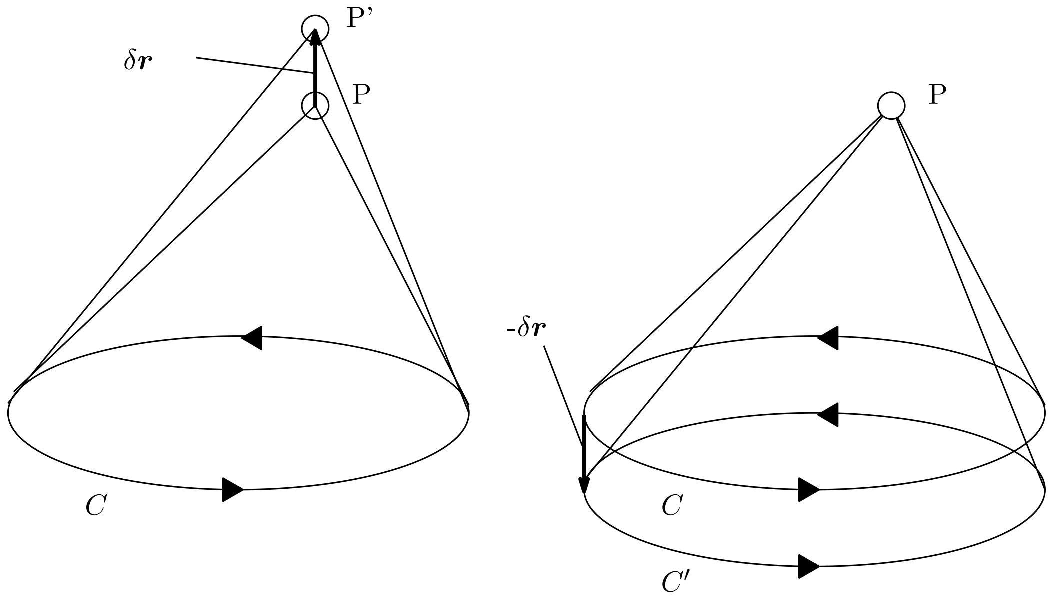


環状電流が作る磁場

C が向きの定められた閉曲線、I が C に沿って流れる電流であるとき、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\Omega(C;\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

は Biot-Savart 則と等価であることを示す。

証明：

P’ を P の近くの点とし、$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = \delta\boldsymbol{r}$ とする。グラディエントの定義により、

$$\Omega(C,\mathrm{P}') - \Omega(C,\mathrm{P}) = \boldsymbol{\nabla}\Omega(C,\mathrm{P})\cdot\delta\boldsymbol{r} + \mathcal{O}((\delta\boldsymbol{r})^2) \tag{2}$$

となる。C' をループ C を $-\delta\boldsymbol{r}$ だけシフトさせたループであるとすると

$$\Omega(C',\mathrm{P}) - \Omega(C,\mathrm{P}) = \Omega(C,\mathrm{P}') - \Omega(C,\mathrm{P}) = \boldsymbol{\nabla}\Omega(C,\mathrm{P})\cdot\delta\boldsymbol{r} + \mathcal{O}((\delta\boldsymbol{r})^2) \tag{3}$$

となる。ループ C, C' で作られる柱状領域の外向き表面（閉曲面）を S とする。また柱状領域の側面を $\bar{S}$ とし、その法線は S の内側から外側を向くようにとる。このとき

$$\Omega(S,\mathrm{P}) = \Omega(C,\mathrm{P}) - \Omega(C,\mathrm{P}') + \Omega(\bar{S},\mathrm{P}) \tag{4}$$

が成り立つ。一方 P は外向き閉曲面 S の外側にあるので、$\Omega(S,\mathrm{P}) = 0$。よって

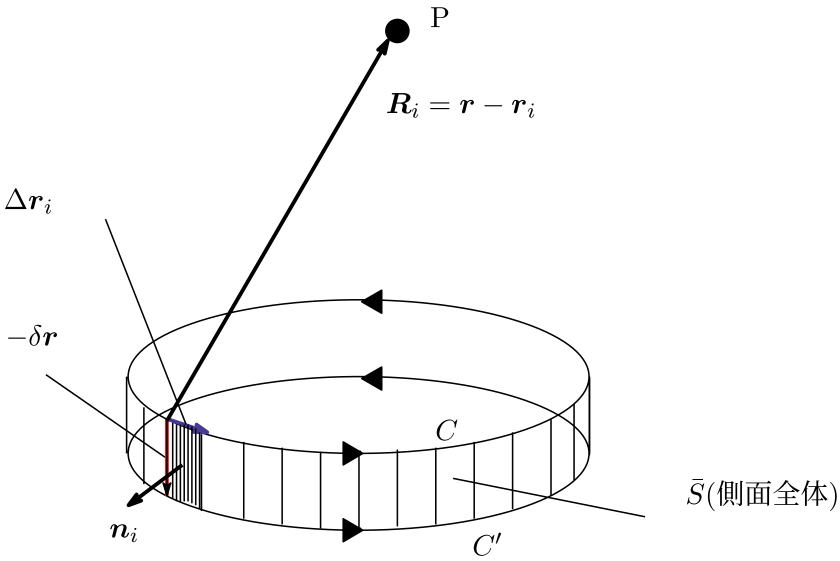
$$\Omega(C,\mathrm{P}') - \Omega(C,\mathrm{P}) = \Omega(\bar{S},\mathrm{P}) \tag{5}$$

が成り立つ。この式の左辺は求めたい量である。一方、右辺は以下に示すように式変形することができる。**$\Omega(\bar{S},\mathrm{P})$ の計算**

ループ C の向きに沿って、分割点 P_1, P_2 $\cdots\cdot$ が並んでいるものとする。i 番目の分割点 P_i の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とし、線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i$ と定義する。P_i を起点とし、$\Delta\boldsymbol{r}_i$ と $\delta\boldsymbol{r}$ で張られる平行四辺形を ΔS_i とすると、

$$\Omega(\bar{S},\mathrm{P}) = \lim_{\Delta r_i\to 0}\sum_i \Omega(\Delta S_i,\mathrm{P}) \tag{6}$$

P から見た微小平面 ΔS_i の立体角は、



- ΔS_i の代表点 P_i から P までの相対的位置ベクトル $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$
- ΔS_i の面積（これも ΔS_i と表す)。
- ΔS_i の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_i$

を用いて

$$\Omega(\Delta S_i, \mathrm{P}) = -\frac{\Delta S_i \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{R}_i}{R_i^3} \tag{7}$$

と表される（$R_i = |\boldsymbol{R}_i|$)。さてベクトルの外積の性質から、

$$\Delta S_i = |\delta\boldsymbol{r} \times \Delta r_i|$$

が成り立ち、かつ $\boldsymbol{n}_i$ と $\delta\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}_i$ は同じ向きであるので、

$$\Delta S_i \boldsymbol{n}_i = \delta\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}_i \tag{8}$$

が成り立つ。これを用いると (7) は

$$\Omega(\Delta S_i, \mathrm{P}) = -\frac{(\delta\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{R}_i}{R_i^3} \tag{9}$$

ベクトル代数の公式 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$ を用いると (9) はさらに

$$\Omega(\Delta S_i, \mathrm{P}) = \left(\frac{\Delta\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i}{R_i^3}\right) \cdot \delta\boldsymbol{r} \tag{10}$$

と表すことができる。(10) を (7) に代入し (3) と比較すると、

$$\boldsymbol{\nabla}\Omega(C, \mathrm{P}) = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i}{R_i^3} = \oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{11}$$

となる。この両辺に $\mu_0 I/(4\pi)$ をかけると、右辺は Biot-Savart 則に従って環状電流が作る磁場 (1) と等価であることがわかる。