2013 年度夏学期 熱力学 (担当:加藤雄介) 演習問題 II 解答例

(文責: 黒澤)

2013 年 6 月 20 日

II-1　理想気体を作業物質とした Carnot Engine の効率 (Carnot efficiency)

- A→B : 等温準静的膨張過程

$$\Delta U = 0\,,\quad W_{\rm in} = -\int_{V_0}^{V_1} P\,{\rm d}V = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{NRT_{\rm H}}{V}\,{\rm d}V = -NRT_{\rm H}\ln\frac{V_1}{V_0}\,,\quad Q_{\rm in} = \Delta U - W_{\rm in} = NRT_{\rm H}\ln\frac{V_1}{V_0}$$

- B→C : 断熱準静的膨張過程

$$Q_{\rm in} = 0\,,\quad \Delta U = cNRT_{\rm L} - cNRT_{\rm H} = -cNR(T_{\rm H} - T_{\rm L})\,,\quad W_{\rm in} = \Delta U - Q_{\rm in} = -cNR(T_{\rm H} - T_{\rm L})$$

- C→D : 等温準静的圧縮過程

$$\Delta U = 0\,,\quad W_{\rm in} = -\int_{V_2}^{V_3} P\,{\rm d}V = -\int_{V_2}^{V_3} \frac{NRT_{\rm L}}{V}\,{\rm d}V = NRT_{\rm L}\ln\frac{V_2}{V_3}\,,\quad Q_{\rm in} = \Delta U - W_{\rm in} = -NRT_{\rm L}\ln\frac{V_2}{V_3}$$

- D→A : 断熱準静的圧縮過程

$$Q_{\rm in} = 0\,,\quad \Delta U = cNRT_{\rm H} - cNRT_{\rm L} = cNR(T_{\rm H} - T_{\rm L})\,,\quad W_{\rm in} = \Delta U - Q_{\rm in} = cNR(T_{\rm H} - T_{\rm L})$$

1. 過程 A→B
2. 過程 C→D
3. ポアソン関係式 $PV^{\gamma} =$ 定数, $\gamma = 1 + 1/c$ を用いて

$$V_2 = V_1\left(\frac{T_{\rm L}}{T_{\rm H}}\right)^{-c}\,,\quad V_3 = V_0\left(\frac{T_{\rm L}}{T_{\rm H}}\right)^{-c}$$

4. $Q_{\rm H} = NRT_{\rm H}\ln(V_1/V_0)$
5. $Q_{\rm L} = NRT_{\rm L}\ln(V_1/V_0)$
6. $W = NRT_{\rm H}\ln(V_1/V_0) - cNR(T_{\rm H} - T_{\rm L}) - NRT_{\rm L}\ln(V_1/V_0) + cNR(T_{\rm H} - T_{\rm L}) = NR(T_{\rm H} - T_{\rm L})\ln(V_1/V_0) > 0$,
   $(\because)\ V_1 > V_0,\ T_{\rm H} > T_{\rm L}$
7. 熱効率 $\eta = W/Q_{\rm H} = 1 - T_{\rm L}/T_{\rm H}$

II-2　熱機関 (heat engine) の効率

- A→B : 断熱準静的膨張過程

$$Q_{\rm in} = 0\,,\quad \Delta U = cNRT_{\rm B} - cNRT_{\rm H} = -cNR(T_{\rm H} - T_{\rm B})\,,\quad W_{\rm in} = \Delta U - Q_{\rm in} = -cNR(T_{\rm H} - T_{\rm B})$$

- B→C : 等積冷却過程

$$W_{\rm in} = 0\,,\quad \Delta U = cNRT_{\rm L} - cNRT_{\rm B} = -cNR(T_{\rm B} - T_{\rm L})\,,\quad Q_{\rm in} = \Delta U - W_{\rm in} = -cNR(T_{\rm B} - T_{\rm L})$$

- C→D : 断熱準静的圧縮過程

$$Q_{\mathrm{in}} = 0\,, \quad \Delta U = cNRT_{\mathrm{D}} - cNRT_{\mathrm{L}} = cNR(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{L}})\,, \quad W_{\mathrm{in}} = \Delta U - Q_{\mathrm{in}} = cNR(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{L}})$$

- D→A : 等積加熱過程

$$W_{\mathrm{in}} = 0\,, \quad \Delta U = cNRT_{\mathrm{H}} - cNRT_{\mathrm{D}} = cNR(T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{D}})\,, \quad Q_{\mathrm{in}} = \Delta U - W_{\mathrm{in}} = cNR(T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{D}})$$

A→B の過程に着目し、A での圧力を P_{A} とする。状態 A では $cNRT_{\mathrm{H}} = cP_{\mathrm{A}}V_0$ だから、ポアソン関係式よりこの過程では

$$PV^{\gamma} = NRT_{\mathrm{H}}V_0^{1/c}$$

である。よって

$$-cNR(T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{B}}) = W_{\mathrm{in}} = -\int_{V_0}^{V_1} P\,\mathrm{d}V = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{NRT_{\mathrm{H}}V_0^{1/c}}{V^{\gamma}}\,\mathrm{d}V = cNRT_{\mathrm{H}}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1/c} - 1\right]$$

すなわち

$$T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{H}}\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1/c}$$

である。同様にして過程 C→D に着目するとポアソン関係式よりこの過程では

$$PV^{\gamma} = NRT_{\mathrm{L}}V_1^{1/c}$$

だから

$$cNR(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{L}}) = W_{\mathrm{in}} = -\int_{V_1}^{V_0} P\,\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_0} \frac{NRT_{\mathrm{L}}V_1^{1/c}}{V^{\gamma}}\,\mathrm{d}V = cNRT_{\mathrm{L}}\left[\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1/c} - 1\right]$$

すなわち

$$T_{\mathrm{D}} = T_L\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1/c}$$

よって熱効率 η は

$$\eta = \frac{\text{外へ行なった仕事}}{\text{高熱源から得た熱}} = \frac{cNR(T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{B}}) - cNR(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{L}})}{cNR(T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{D}})} = 1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1/c}$$

また $T_{\mathrm{L}} < T_{\mathrm{B}}$ および

$$\frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{H}}} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1/c}$$

に気をつけると

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1/c} = 1 - \frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{H}}} < 1 - \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}$$

である。

上記の熱機関 (図 1) は Otto engine と呼ばれており、ガソリンエンジンの理論サイクルである。

II-3　Kelvin の原理から Carnot Engine の効率が作業物質の種類によらないことを導く

Carnot Engine の効率が作業物質による、すなわち熱効率が異なる Carnot Engine が存在することを仮定する。この時、互いに熱効率が異なる二つの Carnot Engine を用意して、熱効率が高い方を A、低い方を B とする。A と B が高温熱源から受けとる熱、低温熱源に渡す熱、行う仕事をそれぞれ $Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{A})}$、$Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{B})}$、$Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{A})}$、$Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{B})}$、$W^{(\mathrm{A})}$、$W^{(\mathrm{B})}$ とする。

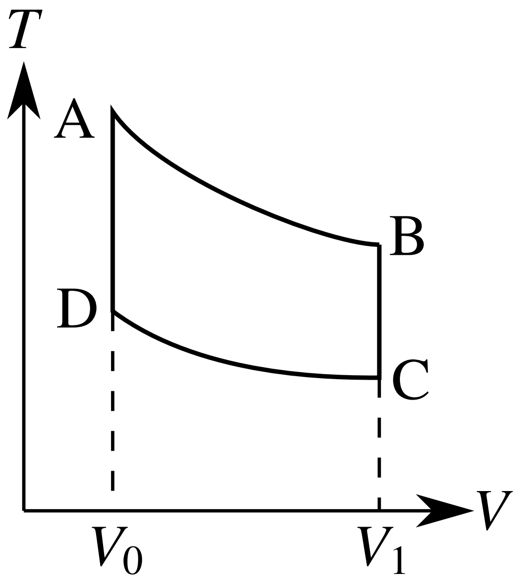

図 1　II-2 でのサイクル (Otto engine)

(熱力学第零法則および Kelvin の原理より、外部に仕事を取り出す熱機関 (サイクル) には必ず高温熱源および低温熱源が必要である。) 仮定より

$$1-\frac{Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{B})}}{Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{B})}}<1-\frac{Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{A})}}{Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{A})}}$$

であるから、$Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{A})}=Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{B})}$ の場合には $Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{A})}<Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{B})}$ および $W^{(\mathrm{B})}<W^{(\mathrm{A})}$ である。

B は Carnot Engine であるから、逆サイクル $\bar{\mathrm{B}}$ が存在する。$\bar{\mathrm{B}}$ は、外部から $W^{(\mathrm{B})}$ の仕事をされたとき、低温熱源から $Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{B})}$ の熱を受けとって高温熱源に $Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{B})}$ の熱を渡す熱機関である。

今、A と $\bar{\mathrm{B}}$ を組み合わせた熱機関を考える。この機関は高温熱源から $Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{A})}$ の熱を受け取り、$W^{(\mathrm{A})}$ の仕事を行ない、低温熱源に $Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{A})}$ の熱を渡し、さらに外部から $W^{(\mathrm{B})}$ の仕事をなされ、低温熱源から $Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{B})}$ の熱を受けとり、高温熱源に $Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{B})}$ の熱を渡すサイクルである。ここで、$Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{A})}=Q_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{B})}$ となるようにすると、このサイクルは高温熱源から $Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{A})}-Q_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{B})}$ の熱を受けとり、外部に対して $W^{(\mathrm{A})}-W^{(\mathrm{B})}$ の仕事を行なう。仮定より $W^{(\mathrm{A})}-W^{(\mathrm{B})}$ は正であるから、このサイクルの存在は Kelvin の原理と矛盾している。

よって背理法により、互いに熱効率が異なる Carnot Engine は存在しない。すなわち Carnot Engine の効率は作業物質の種類によらない。

II-4　断熱過程と Kelvin の原理

$T_{\mathrm{f}}<T_{\mathrm{ad}}(V_{\mathrm{f}})$ なる断熱過程 $A\to B$ が存在すると仮定する。

この時、サイクル

- $\mathrm{A}(T_{\mathrm{i}},V_{\mathrm{i}})\to\mathrm{B}(T_{\mathrm{f}},V_{\mathrm{f}})$　：断熱過程 ($V_{\mathrm{i}}>V_{\mathrm{f}}$)
- $\mathrm{B}(T_{\mathrm{f}},V_{\mathrm{f}})\to\mathrm{C}(T_{\mathrm{ad}}(V_{\mathrm{f}}),V_{\mathrm{f}})$: 等積過程
- $\mathrm{C}(T_{\mathrm{ad}}(V_{\mathrm{f}}),V_{\mathrm{f}})\to\mathrm{A}(T_{\mathrm{i}},V_{\mathrm{i}})$: 断熱準静的過程

を考える (図 3)。過程 A→B および C→A は断熱過程であるから、このサイクル過程は等積過程 B→C でのみ外部と熱をやりとりする。仮定より $T_{\mathrm{ad}}(V_{\mathrm{f}})>T_{\mathrm{f}}$ であるから、過程 B→C で系が外部から受けとった熱量は正である。また、サイクルを一周することで系の内部エネルギーは変化していないから、熱力学第一法則よりこのサイクルが外部に行なった仕事も正である。すなわち、このようなサイクルの存在は Kelvin の原理と矛盾しており、よって A→B のような $T_{\mathrm{f}}<T_{\mathrm{ad}}(V_{\mathrm{f}})$ なる断熱過程は存在しない。

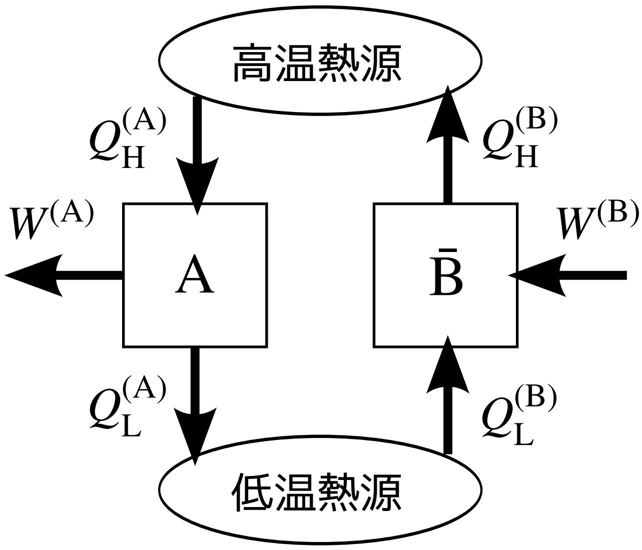

図 2　A と B̄ を組み合わせた熱機関

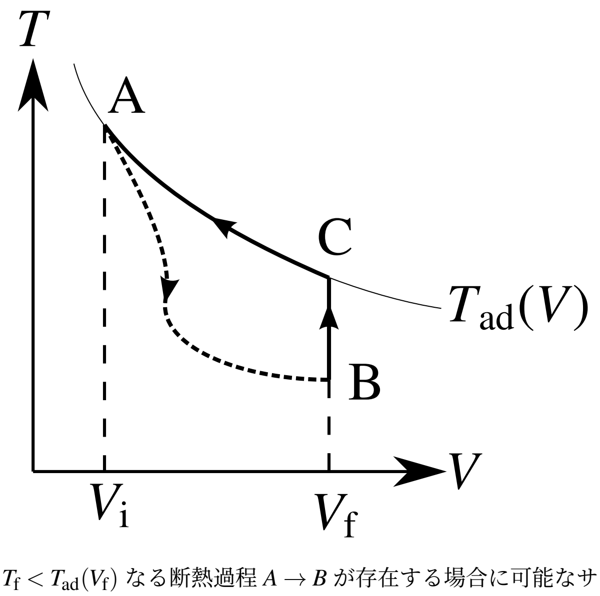

図 3　$T_{\mathrm{f}} < T_{\mathrm{ad}}(V_{\mathrm{f}})$ なる断熱過程 $A \to B$ が存在する場合に可能なサイクル