力学A　演習問題 (担当：加藤雄介)　2017.7.12

第 1 問 赤道上の地点 O の上方 h の高さから初速 0 で自由に落下する小物体 (質量 m) の運動を考える。O を原点とし地球とともに回転する直交座標系（右手系）を、x 軸が経線にそって南を向き、y 軸が赤道に沿って東に向くようにとる。z 軸はその結果鉛直上方を向く軸となる。初期時刻 $t=0$ のとき $x=y=0$、$z=h,\ \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ として以下の問いに答えよ。地球の自転 (角速度の大きさ ω) は十分ゆっくりであるとし、遠心力を無視せよ。重力加速度の大きさを g とする。

1. $x(t)=0$ を示せ。
2. 前問の結果より、yz 平面上の運動として考える。運動方程式が
$$m\ddot{y}=-2m\omega\dot{z},\quad m\ddot{z}=2m\omega\dot{y}-mg \tag{1}$$
と表されることを示せ。
3. (1) の解として等速度運動解 $(\dot{y}_{\mathrm{c}},\dot{z}_{\mathrm{c}})$ を求めよ。
4. (1) の解は等速度運動解と等速円運動解の和
$$(\dot{y}(t),\dot{z}(t))=(\dot{y}_{\mathrm{c}},\dot{z}_{\mathrm{c}})+A(\cos(\Omega t+\phi),\sin(\Omega t+\phi)) \tag{2}$$
の形で書けることを示し、角速度 Ω と積分定数 $A,\ \phi$ を求めよ。
5. 初期条件を満たす解が
$$y(t)=\frac{gt}{2\omega}-\frac{g\sin 2\omega t}{4\omega^2},\quad z(t)=h+\frac{g(\cos 2\omega t-1)}{4\omega^2} \tag{3}$$
で与えられることを示せ。
6. $\omega t\ll 1$ として (3) において、ゼロでない y,z を与える ωt の最低べきの項のみを残すと
$$y(t)\sim\frac{g\omega t^3}{3},\quad z(t)\sim h-\frac{gt^2}{2} \tag{4}$$
で与えられることを示せ。
7. (4) から $z=0$(地表面) における y の値を g,ω,h を用いて表せ。

第 2 問 長さ L, 質量 M の一様な剛体棒が、上端から距離 $\ell(<L/2)$ の点のまわりに摩擦なく自在に回転できる。はじめは剛体棒の軸と鉛直軸の角度が $\theta_0(\in(0,\pi/2))$ となる状態で剛体棒を手を保持し、時刻 $t=0$ に手を静かに放したところ剛体棒は運動を始めた。時刻 $t(\geq 0)$ における鉛直軸と剛体棒がなす角度を $\theta(t)$ とする。棒の太さは長さ L に比べて無視できるものとする。回転軸は水平であり、棒は鉛直面内を回転するものとする。重力加速度の大きさを g とする.

1. 固定軸まわりの剛体棒の慣性モーメント I を M，L，ℓ のうち必要なものを用いて表せ。
2. 時刻 $t(>0)$ において剛体棒にかかる固定回転軸まわりの力のモーメントの大きさを M，L，ℓ, g，$\theta(t)$，I のうち必要なものを用いて表せ。
3. 角加速度 $\ddot{\theta}(t)$ の大きさを M，L，ℓ, g，$\theta(t)$，I のうち必要なものを用いて表せ。
4. 剛体棒の力学的エネルギーが保存することを示せ。
5. $\theta(t)=0$ (剛体棒が鉛直軸と平行) になるときの角速度の大きさ $|\dot{\theta}(t)|$ を M，L，ℓ, g，$\theta(t)$，I のうち必要なものを用いて表せ。
6. 初期角度 θ_0 の大きさが 1 より十分小さいとして、微小振動の周期を M，L，ℓ, g，I のうち必要なものを用いて表せ。

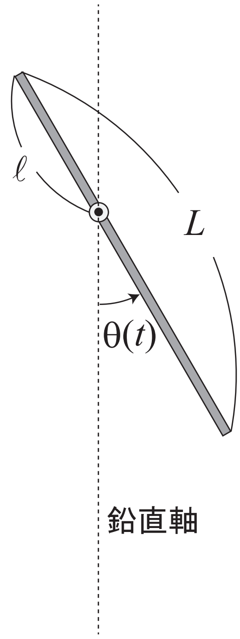

図 1: 第 2 問の図

7. 固定軸の位置のずれ $\ell \to \ell + \Delta\ell$ について、微小振動の周期が $\Delta\ell$ の一次の範囲で変わらないように設計したい。ℓ の値をどの様に取ったらいいか。

第 3 問

質量 M で半径 b の小球体（慣性モーメントは $\frac{2}{5}MR^2$）の一様球体が、図 2) のように、水平な台に固定されている大きな球体 (半径 $a > b$) の面上を最高点からすべることなく転がり始めた。小球体が球面から離れるときの接点と大きな球体の中心を結ぶ線と鉛直軸のなす角度を θ とするとき、$\cos\theta$ を求めよ。

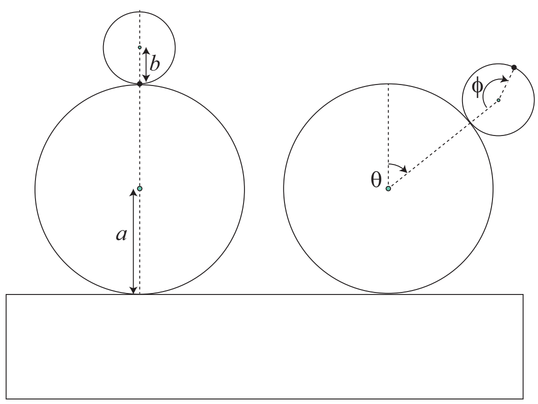

図 2: 第 3 問の図