2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2016.05.25

第06回講義 (05/18) に関連した問題 「2階定係数微分方程式（同次形）、粘性抵抗をうける振動子、仕事の定義」

理解度確認問題

第1問　2階線形同次方程式の一般解 以下の微分方程式の、基本解と一般解を求めよ.

$$3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+7\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{3}$$

第2問　粘性流体中の単振り子；標準形への落とし込み 質量 m、半径 a の球形物体が長さ ℓ のひもを介して天井からつるされている。まわりの空気の粘性係数を η とし、物体が速さに比例する粘性抵抗力 (大きさ $6\pi a\eta\times$ 速さ) を受けるとき、微小振動に対する運動方程式を書け。この場合、講義で扱った「標準形」

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\kappa\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \tag{4}$$

における κ に相当するものは何か。与えられた物理量を用いて表せ。

第3問　緩和時間 過減衰、臨界減衰、減衰振動のうち、固有振動数 (ω_0) が同じなら、一番早く減衰するのはどれか。時間 t の関数が t が大きいところで、

$$F(t)=\exp(-t/\tau)\times\text{定数またはべき関数} \tag{5}$$

で与えられるとき τ を緩和時間または減衰時間という。τ が短いとき「減衰が速い」などという。

第4問　緩和時間

1. 減衰振動における緩和時間を求めよ。
2. 過減衰における緩和時間を ω_0 と κ を用いて表せ。

第5問　仕事の定義

仕事の定義を線積分を用いて述べよ。

第6問　バネの力がする仕事

ばね定数 k のばねに結び付けられた質点（質量 m）をばねの伸びが x_a から x_b となるまで引き伸ばしたとき、ばねの力のする仕事を求めよ。

補足問題

第 1 問　2 階定係数線形同次方程式の一般解の"証明"(特性方程式が重根を持たない場合) 微分方程式

$$L[y]=0, \quad L[y] \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by \tag{6}$$

の一般解が、$x=0$ まわりの級数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n \tag{7}$$

で表せるとして、二つの基本解の線形結合で表せることを以下の手順で示せ。ただし $a^2-4b\neq 0$ であるものとし、特性方程式の解（特性根）を α,β とする。

1. c_n が 3 項漸化式

$$c_{n+2}+ac_{n+1}+bc_n=0, \quad n=0,1,2\cdots \tag{8}$$

を満たすことを示せ。

2. (8) の一般解が

$$c_n=d_{\mathrm{I}}\alpha^n+d_{\mathrm{II}}\beta^n \tag{9}$$

で表せることを示せ。

3. (9) を (7) に代入して

$$y=d_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\alpha x}+d_{\mathrm{II}}\mathrm{e}^{\beta x} \tag{10}$$

と書けることを示せ。

第 2 問　2 階定係数線形同次方程式の一般解の"証明"(特性方程式が重根を持つ場合) 前問で、$a^2-4b=0$ が成り立つとしても、同様な議論で、一般解を求めることができる。

1. 三項漸化式 (8) の一般解を求めよ。
2. その解を (7) に代入して (6) に対する一般解を求めよ。

2015 年度 S セメスター力学 A
（担当：加藤雄介）　2016.05.25

第 07 回講義 (05/25) に関連した問題 「2 階定係数微分方程式（同次形）、粘性抵抗をうける振動子、仕事の定義」

理解度確認問題

第 1 問　線積分の媒介変数表示
質点が曲線 C に沿って移動するとき、力 $\boldsymbol{F}$ のする仕事を線積分の媒介変数表示を用いて表せ。

第 2 問　万有引力がする仕事
質点が曲線 C に沿って移動するとき、$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{r}/r^3$ がする仕事を求めよ。

第 3 問　仕事・エネルギー定理
質点の運動エネルギーが時刻 t_a から t_b の間に ΔK だけ変化した。ΔK は時刻 t_a から t_b の間に質点がされた仕事に等しいことを示せ。

第 4 問　保存力 保存力の定義を述べよ。

第 5 問　保存力・非保存力 保存力・非保存力の例を挙げよ。

第 6 問　ポテンシャルエネルギー 保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に対するポテンシャルエネルギー $V(\boldsymbol{r})$ の定義を書け。

第 7 問　ポテンシャルエネルギーから保存力を導く ポテンシャルエネルギー $V(\boldsymbol{r})$ を用いて保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を表せ。

補足問題

第 1 問　仕事
x 方向にかかる力

$$F = -kx + \lambda x^3, \quad k > 0, \quad \lambda > 0$$

の下で小物体が $x = x_a$ から x_b まで一次元的な運動をするとき、この力が物体に対してする仕事を求めよ。

第 2 問　一次元的運動をする質点にかかる力
x 方向に一次元的運動をする質点にかかる力 $F(x)$ が質点の位置だけに依存する (x において質点が受ける力は速度、加速度によらない) とき、この力は保存力であることを示せ。