2016年度Aセメスター　電磁気学Bレポート問題III
（担当：加藤雄介）2016.12.21

第1問

帯電していない半径 a の導体球を, 一様な静電場の中に置く.

(1) 導体球の中心を原点として, 直交座標系 (x, y, z) を考える. まず, 一様な静電場 $\boldsymbol{E}_0 = (0, 0, E_0)$ 中の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電位 (静電ポテンシャル) $\phi_0(\boldsymbol{r})$ を求めよ. 電位の基準点は $(0, 0, a)$ とせよ.

(2) 一様静電場に導体球を置くと. 導体内の電場をゼロにするために導体表面には面密度 σ の電荷が誘起される. この電荷によって, 導体外部には新しい電場 $\boldsymbol{E}'$ が生じるために, 導体外部の全電場は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$ となる. この場合, 導体球表面に誘起された電場 $\boldsymbol{E}'$ は大きさ p をもつ電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ のつくる電場とみなすことができる. $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{E}_0$ の向きは同じである.

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電場 $\boldsymbol{E}'$ による電位 $\phi'(\boldsymbol{r})$ を求めよ. ここで, 図1のような $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{r}$ の張る2次元平面での極座標を用いよ (レポート問題IIの第3問を参照). また, 電位の基準点は $(0, 0, a)$ とせよ. (ヒント: $(0, 0, a) \to$ (無限遠点) $\to \boldsymbol{r}$ となる積分路を考えると良い.)

(3) 導体外部の全電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$ による電位 $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0(\boldsymbol{r}) + \phi'(\boldsymbol{r})$ を考え, この電位の導体表面での条件 (境界条件) を考えることによって双極子モーメントの大きさ p を E_0 と a を用いて書け.

(4) 導体表面すぐ外の電場が表面と直交することを用いて, 導体表面に誘起された電荷面密度 $\sigma = \sigma(\boldsymbol{r})$ を求めよ. (12月7日の第10回講義の例題1の結果を参照すると良い.)

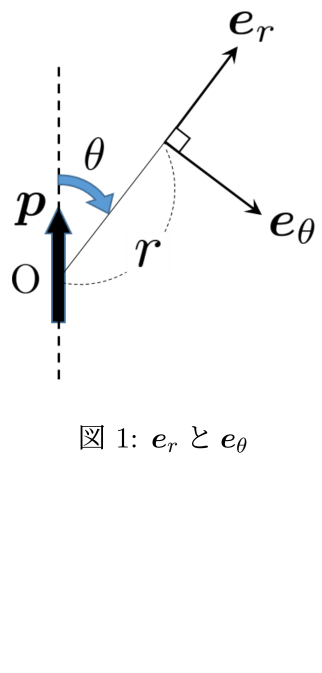

図 1: $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$

第 2 問

円形回路を流れる電流の作る磁場を考える.

(1) まずは, 図 2 のように中心軸が z 軸である xy 平面上にある半径 a の円形回路を図の矢印の向きに電流 I が流れている. この円電流が z 軸上の点 $(0, 0, z)$ に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}(z)$ を Biot-Savart の法則を用いて求めよ (図のように円形回路上の x 軸からの角度 θ の点の座標は $(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ である).

(2) 次に, 図 3 のように, 中心軸が z 軸で, 半径 a, 巻き数 n の厚みが無視できる 2 つのコイルが距離 d 離れて xy 平面に平行に設置されている. 図 3 は y 軸負の方向から見た図である. それぞれのコイルに電流 I が図の向きに流れているとき, z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}(z)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $\boldsymbol{B}(z)$ を $z = 0$ まわりで Taylor 展開して z の 2 次まで求め, z の 3 次以上の項を無視し, (2) のコイルが $z = 0$ 近傍につくる磁場を求めよ. また, Taylor 展開して得られた磁場の式において $d = a$ とすると z の 2 次の項が消えることを確かめよ.

・(3) で分かるように, $d = a$ とした 1 対のコイルは一様性の非常に良い磁場を作り, Helmholtz コイルと呼ばれる.

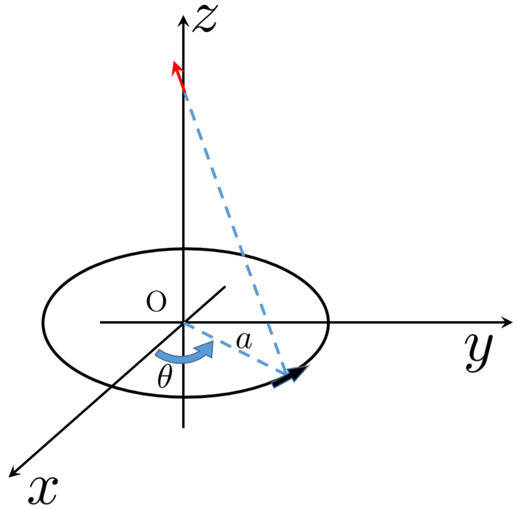

図 2: 円形回路を流れる電流

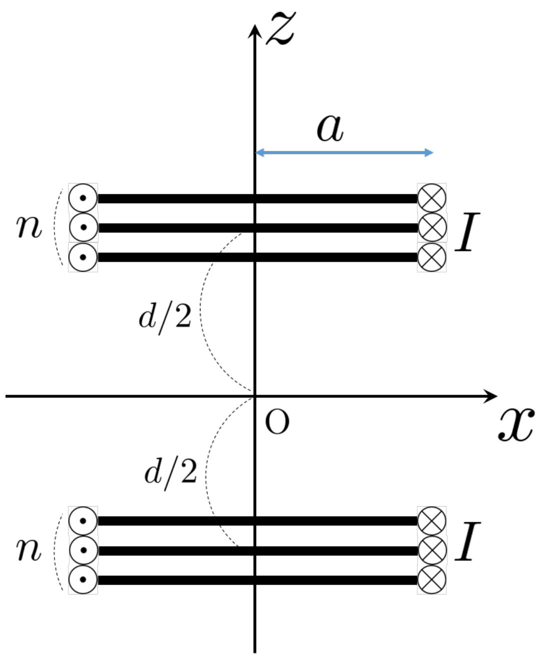

図 3: 2 つのコイル