2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第04回講義 (05/08) に関連した問題 「仕事、保存力、ポテンシャルエネルギー」

理解度確認問題

第1問　仕事の定義

仕事の定義を線積分を用いて述べよ。

第2問　保存力

保存力とはどのような性質を持った力のことか。また例を挙げよ。

第3問　ポテンシャルエネルギー ポテンシャルエネルギーの定義を線積分を用いて述べよ。

補足問題

第1問　仕事

x 方向にかかる力

$$F = -kx + \lambda x^3, \quad k > 0, \quad \lambda > 0$$

の下で小物体が $x = x_a$ から x_b まで移動するとき、この力が物体に対してする仕事を求めよ。またこの力が保存力かどうか述べよ。

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第05回講義(05/22)に関連した問題「孤立系、非孤立系、力学的エネルギー保存則」

理解度確認問題

第1問　力学的エネルギー保存則

力学的エネルギーが保存する条件（二つの条件）を述べよ。

第2問　仕事

次の命題は正しいか。「二つの力が作用反作用の関係にあるとき、二つの力がする仕事の和はゼロである。」

第3問　ポテンシャルエネルギー　ポテンシャルエネルギーの定義を線積分を用いて述べよ。

補足問題

第1問　仕事エネルギー定理

小物体の運動エネルギーの変化は、その物体に働く合力のする仕事に等しいことを示せ。

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第06回講義 (05/29) に関連した問題 「2つ以上の物体が動く系の力学的エネルギー、gradient」

理解度確認問題

第1問　仕事

次の命題は正しいか。

「非保存力が外力として系に働くときには正の仕事をすることもある。」

第2問　二つの物体が動く系の力学的エネルギー保存則

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k_1x_1 + k'(x_2 - x_1), \quad M\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k_2x_2 - k'(x_2 - x_1) \tag{1}$$

に従う系の力学的エネルギーを求めよ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k' > 0$)。

第3問　万有引力 万有引力が保存力であることを示せ。

第4問　gradient gradient の定義を述べよ。その幾何学的意味を述べよ。

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第07回講義(06/03)に関連した問題 「運動量保存則、重心運動、相対運動、換算質量」

理解度確認問題

第1問　運動量保存則

次の命題は正しいか。

「運動量が孤立系で保存するための条件は、非保存力が仕事をしないことである。」

第2問　重心運動

孤立系の重心座標は時間とともにどのように変化するか。

補足問題

第1問　2体問題の解

1. 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = k(x_2 - x_1 - \ell), \quad M\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_2 - x_1 - \ell), \quad k > 0, \quad \ell > 0 \tag{2}$$

   を重心座標の満たす運動方程式と相対座標の満たす運動方程式に分離せよ。

2. 前問で得られた微分方程式の一般解を求めよ。
3. また初期条件 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \ell$, $\dot{x}_1(0) = v_0(> 0)$, $\dot{x}_2(0) = 0$ を満たす解 $x_1(t)$, $x_2(2)$ を求めよ。

2015 年度 S セメスター力学 A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第 08 回講義 (06/05) に関連した問題 「角運動量、テイラー展開、単振動の微分方程式」

理解度確認問題

第 1 問　角運動量保存則

中心力の下での一つの小物体の運動について以下の問いに答えよ。

1. 角運動量が保存することを示せ。
2. 小物体はある平面上を運動することを示せ。

第 2 問　複数の物体からなる孤立系における角運動量

孤立系において角運動量が保存するためには、二つの物体間に働く力がどのような性質を持つ必要があるか。

第 3 問　単振り子 単振り子の角運動量は保存するか。

第 4 問　テイラー展開 $\cos x, \sin x, \mathrm{e}^x$ を $x = 0$ まわりでテイラー展開せよ。

第 5 問　単振動の微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{3}$$

の解の一般解を $x(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$ と書く。A, Ω, ϕ のうち、初期条件によるものはどれか、よらないものはどれか。

補足問題

第 1 問　一定磁場中の荷電粒子の角運動量

質量 m，電荷 q の荷電粒子（小物体）が一様磁場 (z 方向、大きさ B) 中で次のような運動をしている。

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{v_0\cos\omega_\mathrm{c} t}{\omega_\mathrm{c}}, -\frac{v_0\sin\omega_\mathrm{c} t}{\omega_\mathrm{c}}, v_z t\right) \tag{4}$$

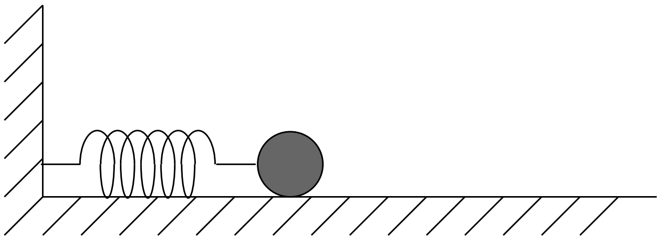
ここで $v_0 > 0$, v_z, ω_c は時間に依存しないものとする。

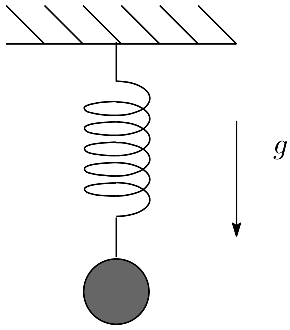
1. ω_c を q, B, m を用いて表せ。
2. 角運動量 $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ を計算し、時間とともにどのような変化するか述べよ。

第 2 問　ポテンシャル極小点まわりの微小振動 質量 m の小物体がポテンシャル $U(x)$ の下で x 軸上を運動する。

$$U(0) = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2 U(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} > 0 \tag{5}$$

を満たすとき、$x \sim 0$ 付近での微小振動の周期を求めよ。





第 3 問　非線形ばねの下での微小振動 質量 m のおもりが、バネに結び付けられている。そのバネの弾性エネルギー（ポテンシャルエネルギー）$U(x)$ は自然長からの伸び x の関数として

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}, \quad k > 0, \quad \lambda > 0$$

で与えられるとする。図 1 のようにまさつのない水平面をおもりが微小振動するときの周期と図 2 のようにおもりが微小振動するときの周期ではどちらが短いか？理由とともに述べよ

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第09回講義 (06/12) に関連した問題 「減衰振動」

理解度確認問題

第1問　2階線形同次方程式の一般解 以下の微分方程式の、基本解と一般解を求めよ.

$$3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+7\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{8}$$

第2問　粘性流体中の単振り子；標準形への落とし込み 質量 m、半径 a の球形物体が長さ ℓ のひもを介して天井からつるされている。まわりの空気の粘性係数を η とし、物体が速さに比例する粘性抵抗力 (大きさ $6\pi a\eta\times$ 速さ) を受けるとき、微小振動に対する運動方程式を書け。この場合、講義で扱った「標準形」

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\kappa\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \tag{9}$$

における κ に相当するものは何か。与えられた物理量を用いて表せ。

第3問　緩和時間 過減衰、臨界減衰、減衰振動のうち、固有振動数 (ω_0) が同じなら、一番早く減衰するのはどれか。時間 t の関数が t が大きいところで、

$$F(t)=\exp(-t/\tau)\times \text{減衰しない関数またはべき関数} \tag{10}$$

で与えられるとき τ を緩和時間または減衰時間という。τ が短いとき「減衰が速い」などという。

第4問　緩和時間 減衰振動における緩和時間、過減衰における緩和時間を ω_0 と κ を用いて表せ。

補足問題 (補足説明を問題形式で掲載)

第1問　2階定数係数線形同次方程式の一般解の”証明”(特性方程式が重根を持たない場合) 微分方程式

$$L[y]=0,\quad L[y]\equiv\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by \tag{11}$$

の一般解が、$x=0$ まわりの級数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n \tag{12}$$

で表せるとして、二つの基本解の線形結合で表せることを以下の手順で示せ。ただし $a^2-4b\neq 0$ であるものとし、特性方程式の解（特性根）を α,β とする。

1. c_n が 3 項漸化式

$$c_{n+2} + ac_{n+1} + bc_n = 0, \quad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{13}$$

を満たすことを示せ。

2. (13) の一般解が

$$c_n = d_{\mathrm{I}}\alpha^n + d_{\mathrm{II}}\beta^n \tag{14}$$

で表せることを示せ。

3. (14) を (12) に代入して

$$y = d_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\alpha x} + d_{\mathrm{II}}\mathrm{e}^{\beta x} \tag{15}$$

と書けることを示せ。

第 2 問　2 階定係数線形同次方程式の一般解の"証明"(特性方程式が重根を持つ場合) 前問で、$a^2 - 4b = 0$ が成り立つとしても、同様な議論で、一般解を求めることができる。

1. 三項漸化式 (13) の一般解を求めよ。
2. その解を (12) に代入して (11) に対する一般解を求めよ。

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第10回講義 (06/19) に関連した問題 「中心力、万有引力とケプラーの法則」

理解度確認問題

第1問

3次元中心力の下での運動はなぜ2次元極座標で表すことができるのか。

第2問

平面上の運動における面積速度と、平面に垂直な角運動量成分 L の関係を述べよ。

第3問

3次元空間中の中心力ポテンシャル $U(r)$ の下での物体 (質量 m) における角運動量の大きさを L とするとき、r 方向の運動はあるポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}(r)$ の下での一次元運動

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = U_{\mathrm{eff}}(r), \quad r \geq 0 \tag{16}$$

と対応付けることができる。このとき $U_{\mathrm{eff}}(r)$ を $U(r)$, L, m, r を用いて表せ。

補足問題

第1問

2次元極座標における r と θ の関係が

$$r = \frac{\ell}{1+e\cos\theta} \tag{17}$$

と与えられるとする。$e=1$ が放物線、$e>1$ は双曲線に対応することを示せ。

第2問

$$r = \frac{\ell}{1+e\cos\theta} \tag{18}$$

$0<e<1$ のとき、楕円の長半径と短半径を ℓ と e を用いて表せ。

第3問

2階線形定係数非同次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = f(x) \tag{19}$$

の一般解 (積分定数を二つ含む解) は (19) の特解 y_{ih}（積分定数を含まない解）と同次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0 \tag{20}$$

の基本解 $y_1(x)$ $y_2(x)$ の線形結合の和

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_{\mathrm{ih}} \tag{21}$$

で与えられることを示せ。

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第11回講義 (06/26) に関連した問題 「固定軸まわりの剛体運動」

理解度確認問題

第1問

固定軸まわりの剛体の回転運動における物理量、運動方程式、エネルギー保存則を、一次元的な小物体の運動のそれらと対応付けよ。

第2問

スケート選手が（ほぼ固定軸まわりで）回転しているとき腕を回転軸から離れる方向に伸ばすと回転速度は上がるか下がるか。その理由も述べよ。

補足問題

第1問

長さ ℓ、質量 M の細い棒の端を通り、棒の軸に垂直な固定軸まわりの回転運動に対する慣性モーメントは $M\ell^2/3$ で与えられる。しかし回転固定軸が棒の軸に垂直であり、かつ棒の端から距離 $d(\leq \ell)$ の点を通るとき、その軸まわりの慣性モーメントは異なる値をとる。その値を求めよ。

第2問

半径 R の一様な球体 (質量 M) の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
ヒント：球体を中心軸に垂直な円盤に分割し、それぞれの円盤の慣性モーメントを足し上げて、区分求積法で極限値を積分で表して求める。

第3問

半径 R の薄い球殻 (質量 M) の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.17

第12回講義 (07/10) に関連した問題 「剛体の平面運動」

理解度確認問題

質量、形状は等しいが、慣性モーメントは異なる二つの円柱を斜面に沿ってすべることなく転がすとき、重心の加速度が大きいのは慣性モーメントの大きい方か小さいほうか。

補足問題

半径 a の球面の内側を、半径 b の球体 (質量 M 慣性モーメント I) がすべることなく転がるとき (図 1)、微小振動の周期を求めよ。

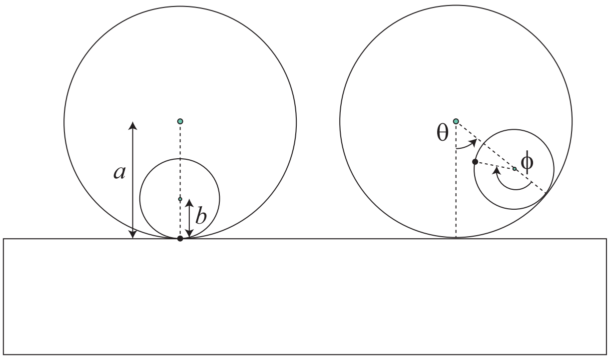


図 1:

演習問題

質量Mで半径 b の小球体（慣性モーメントは $\frac{2}{5}MR^2$）の一様球体が、図 2) のように大きな球体 (半径 $a > b$) の面上を最高点からすべることなく転がり始めた。小球体が球面から離れるときの接点と大きな球体の中心を結ぶ線と鉛直軸のなす角度を θ とするとき、$\cos\theta$ を求めよ。

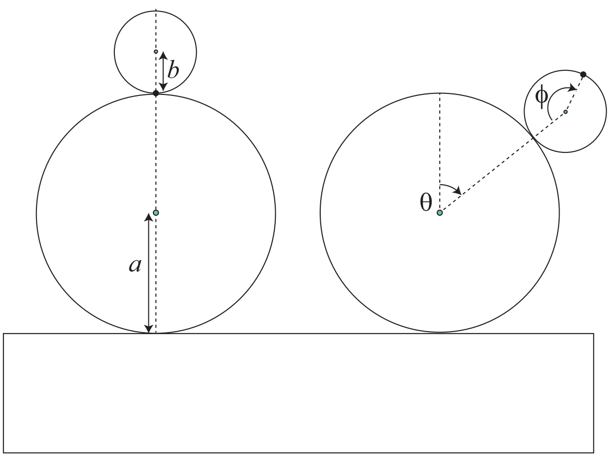


図 2:

2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.07.20

第13回講義(07/17)に関連した問題 「回転座標系」

理解度確認問題

第1問

慣性系に対して等速円運動する座標系(回転ベクトル$\boldsymbol{\omega}$)における小物体(質量m)の運動は電磁場中の荷電粒子(電荷q)の運動と対応させることができる。どのような磁場、電場の下での運動と対応するか。

第2問

時計回りに角速度$\omega > 0$で等速回転しているレコード上を、中心から半径Rの円周に沿って、テントウムシが(レコードに対して)反時計回りに速さvで歩いている。レコードの上に立った観測者からみたときテントウムシに働く慣性力をすべて挙げ、大きさと向きを答えよ。

第3問

時計回りに角速度$\omega > 0$で等速回転しているレコード上を、中心から半径Rの円周に沿って、テントウムシが(レコードに対して)中心から遠ざかる動径方向に速さvで歩いている。レコードの上に立った観測者からみたときテントウムシに働く慣性力をすべて挙げ、大きさと向きを答えよ。

第4問

南半球の単振り子の振動面は水平面に対してどちら向きに回転するか。

第5問

南半球の上空から自由落下する小物体の落下地点は鉛直真下の地点よりどちらの方角に寄っているか。

演習問題

赤道上の地点Oの上方hの高さから初速0で自由に落下する小物体(質量m)の運動を考える。Oを原点とし地球とともに回転する直交座標系（右手系）を、x軸が経線にそって南を向き、y軸が赤道に沿って東に向くようにとる。z軸はその結果鉛直上方を向く軸となる。初期時刻$t=0$のとき$x=y=0$、$z=h, \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$として以下の問いに答えよ。地球の自転(角速度の大きさω)は十分ゆっくりであるとし、遠心力を無視せよ。重力加速度の大きさをgとする。

1. $x(t)=0$を示せ。
2. 前問の結果より、yz平面上の運動として考える。運動方程式が
$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{z}, \quad m\ddot{z} = 2m\omega\dot{y} - mg \tag{22}$$
と表されることを示せ。
3. (22)の解として等速度運動解$(\dot{y}_{\rm c}, \dot{z}_{\rm c})$を求めよ。
4. (22)の解は等速度運動解と等速円運動解の和
$$(\dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (\dot{y}_{\rm c}, \dot{z}_{\rm c}) + A(\cos(\Omega t + \phi), \sin(\Omega t + \phi)) \tag{23}$$
の形で書けることを示し、角速度Ωと積分定数A, ϕを求めよ。

5. 初期条件を満たす解が

$$y(t) = \frac{gt}{2\omega} - \frac{g\sin 2\omega t}{4\omega^2}, \quad z(t) = h + \frac{g(\cos 2\omega t - 1)}{4\omega^2} \tag{24}$$

で与えられることを示せ。

6. $\omega t \ll 1$ として (24) において、ゼロでない y, z を与える ωt の最低べきの項のみを残すと

$$y(t) \sim \frac{g\omega t^3}{3}, \quad z(t) \sim h - \frac{gt^2}{2} \tag{25}$$

で与えられることを示せ。

7. (25) から $z = 0$(地表面) における y の値を g, ω, h を用いて表せ。