2015年度Aセメスター　電磁気学B
（担当：加藤雄介）　2015.10.08

第04回 (10/07) の補足説明」

[球に一様分布する電荷が作る電場]

$$
\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} \frac{(x-x')\mathrm{d}x'}{(a^2+x^2-2xx')^{\frac{1}{2}}} \\
&= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x' \left[(x-x')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\left(\frac{(a^2+x^2-2xx')^{\frac{1}{2}}}{-x}\right)\right] \\
&= \left[(x-x')\left(\frac{(a^2+x^2-2xx')^{\frac{1}{2}}}{-x}\right)\right]_{x'=-a}^{x'=a} - \frac{1}{x}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x'(a^2+x^2-2xx')^{\frac{1}{2}} && (1) \\
&= \left[(x-x')\left(\frac{(a^2+x^2-2xx')^{\frac{1}{2}}}{-x}\right)\right]_{x'=-a}^{x'=a} - \frac{1}{3x^2}\left[(a^2+x^2-2xx')^{\frac{3}{2}}\right]_{x'=-a}^{x'=a} && (2) \\
&= \frac{(x-a)^2}{-x} + \frac{(x+a)^2}{x} + \frac{1}{3x^2}\left((x-a)^3-(x+a)^3\right) = 2a - \frac{2a^3}{3x^2} && (3)
\end{aligned}
$$

これを用いてPにおける電場の大きさは

$$
\begin{aligned}
E &= 4\pi k\rho a - 2\pi k\rho \int_{-a}^{a} \frac{(x-x')\mathrm{d}x'}{(a^2+x^2-2xx')^{\frac{1}{2}}} \\
&= 4\pi k\rho a - 2\pi k\rho\left(2a - \frac{2a^3}{3x^2}\right) \\
&= \frac{4\pi k\rho a^3}{3x^2} = \frac{kQ}{x^2} && (4)
\end{aligned}
$$

となる。