2014 年度冬学期振動波動論 第 13 回講義 (01/26) に関連した問題
（担当：加藤雄介）　2015.01.31

理解度確認問題

第 1 問 3 次元流体の運動方程式

運動方程式

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r},t)v_\mu(x,t)}{\partial t}+\nabla\cdot(n(\boldsymbol{r},t)v_\mu(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t))=-\frac{1}{m}(\nabla P(\boldsymbol{r},t))_\mu,\quad \mu=x,y,z \tag{1}$$

を nabla 記号や内積記号 $\cdot$ を用いずに偏微分記号

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

を用いてあらわに書き下せ

第 2 問 3 次元波動方程式の導出

連続の方程式

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot(n(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t))=0 \tag{3}$$

と運動方程式 (1) から 3 次元波動方程式を導け。

補足問題

第 1 問 3 次元波動方程式の解の例 I

3 次元波動方程式の解のうち、x,t にのみ依存し、y と z には依存しない解 $f(x,t)$ はダランベールの解

$$f(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct) \tag{4}$$

の形に書けることを示せ (c は波の速さを表す)。

第 2 問 3 次元波動方程式の解の例 II

前問の例と同様に

$$f(y,t)=F(y\mp ct)\quad f(z,t)=F(z\mp ct) \tag{5}$$

という解も存在する。3 次元空間では x 方向が特別な方向というわけではないのでもっともなことである。その意味では x,y,z が特別な方向ではないので、任意の方向に進む波の解もあるはずである。実際 $\boldsymbol{n}$ を任意の方向の単位ベクトルとすると

$$f(\boldsymbol{r},t)=F(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}-ct) \tag{6}$$

も 3 次元方程式の解である。実際これが解であることを示せ。

第 3 問 3 次元波動方程式の解の例 III

前問の解（6) において F を三角関数としたもの

$$f(\boldsymbol{r},t)=F_0\cos\left(2\pi\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}-ct}{\lambda}+\phi\right) \tag{7}$$

を平面波という。$\boldsymbol{k}=2\pi\boldsymbol{n}/\lambda$ と $\omega=2\pi c/\lambda$ を用いて

$$f(\boldsymbol{r},t)=F_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\phi) \tag{8}$$

と表すことも多い。ベクトル $\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルと呼ばれる。さて $f(\boldsymbol{r},t)$ の値が等しい面を波面という。平面波の波面の方程式を表せ。