2014年度冬学期振動波動論 第11回講義 (01/19) に関連した問題
（担当：加藤雄介） 2015.01.26

理解度確認問題

第1問 変数分離法と基準振動

弦の振動に対する変数分離型の解と質点系の基準振動との対応について述べよ。

第2問 両端固定端の振動の周期 I

初期波形 $f(x, t = 0) = a \sin(n\pi x/L)$ $(n = 1, 2, , 3 \cdots)$ で初期速度分布がゼロである初期値問題の解の周期を求めよ。

第3問 両端固定端の振動の周期 II

次の命題は正しいか。

「両端固定端の弦 (長さ L) の振動の周期は初期条件によらず $2L/v$ で与えられる。」

第4問 フーリエ展開係数と初期条件

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

における係数 a_n と b_n を初期波形 $f_0(x) = f(x, t = 0)$ と初期速度分布 $v_0(x) = \partial f(x,t)/\partial t\Big|_{t=0}$ を用いて表せ。

補足問題

第1問 変数分離法での一般解とダランベールの解

変数分離法での一般解 (1) が、ダランベールの解

$$f(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt) \tag{2}$$

の形に書けることを示せ。そのときの $F(x)$ と $G(x)$ を a_n, b_n と三角関数を用いて表せ。

第2問 固定端自由端の弦の変数分離法による一般解

$x = 0$ で自由端, $x = L$ で固定端の境界条件を満たす弦の運動を変数分離法で解くと一般解

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi vt}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi vt}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \tag{3}$$

が得られることを示せ。

演習問題

フーリエ級数展開のグラフ作成

$x \in [0, 1]$ に対して定義される関数

$$y = f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{for } 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{4(1-x)}{3}, & \text{for } \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$$

の形のフーリエ級数で表せ（つまり c_n を求めよ）。またもとの曲線 $y = f(x)$ と、

$$y = c_1 \sin(\pi x),$$

$$y = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \sin(2\pi x) + c_3 \sin(3\pi x),$$

$$y = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \sin(2\pi x) + c_3 \sin(3\pi x) + c_4 \sin(4\pi x) + c_5 \sin(5\pi x),$$

のグラフをグラフィックソフトを用いて描け。数種類のグラフィックソフトが情報教育棟で利用可能なはずである。三角関数の重ね合わせでもとの曲線が近似されていくことを確かめよ。