

2014 年度冬学期振動波動論 第 8 回講義 (12/15) に関連した問題  
(担当：加藤雄介) 2014.12.16

理解度確認問題

第 1 問 波動のエネルギー I

$x = 0, \ell$  で固定端の境界条件を満たすとき、弦の力学的エネルギー

$$\int_0^\ell \varepsilon(x, t) dx, \quad \varepsilon(x, t) = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$

は保存するか否か。両端が自由端の場合はどうか。

第 2 問 波動のエネルギー II

$x = \ell$  で固定端の境界条件を満たし、 $x = 0$  で境界条件

$$f(x = 0, t) = g(t) \quad (1)$$

( $g(t)$  は  $t < 0$  で  $g(t) = 0$  を満たす連続関数) を満たすとき、弦の力学的エネルギーは保存するか。

第 3 問 局所的エネルギー保存則

$$\frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j^\varepsilon}{\partial x} = 0, \quad j^\varepsilon = -T \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2)$$

が成り立つとき  $j^\varepsilon$  はエネルギー流とみなせることを説明せよ。

第 4 問 解の一意性 I

弦の両端が固定端または自由端のときに解の一意性は成り立つか。

第 5 問 解の一意性 II

弦が第 2 問と同じ境界条件を満たすとき、解の一意性は成り立つか。

第 6 問 固定端反射

弦が  $x \in (-\infty, 0]$  の領域にあり、 $x = 0$  が固定端であるときダランベールの解における二つの一変数関数  $F$  と  $G$  の間にはどのような関係が成り立つか。

補足問題

第 1 問 局所的エネルギー保存則の導出

(2) を導け。

第 2 問 エネルギー流

$$j^\varepsilon = -T \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x}$$

は右向き進行波では正の値をとり、左向き進行波では負の値を取ることを示せ。

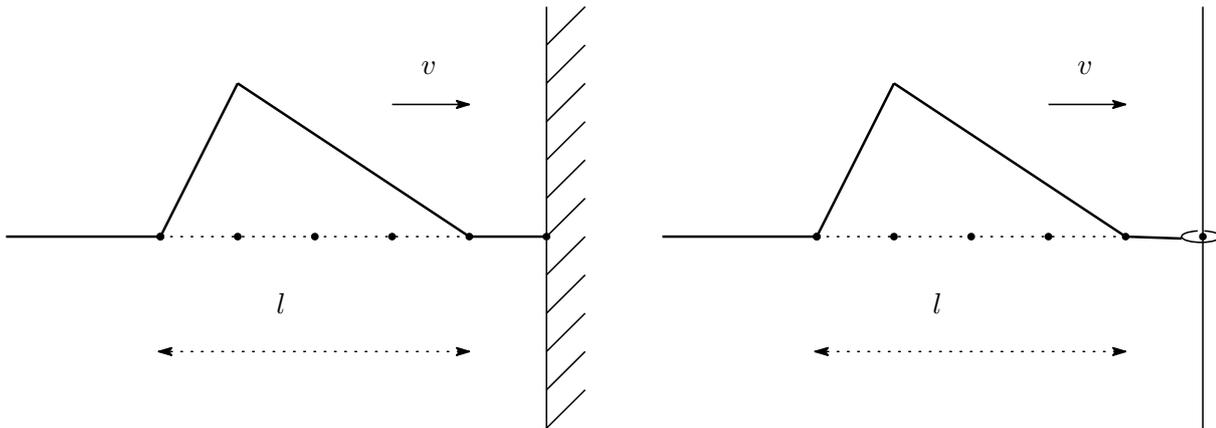
## 演習問題

### 第1問 固定端反射、自由端反射

$t = 0$ における波形が図のような波が (1) 固定端に入射した場合 (2) 自由端に入射した場合の波形を  $\tau = \frac{l}{v}$ とおき、

$$t = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\tau}{2}, \quad \frac{3\tau}{4}, \quad \tau$$

の場合に描け (自由端反射は次回扱います)。



### 第2問\* 波動の発生源が境界にある場合のダランベールの解

弦が半直線  $x \in (0, \infty)$  上に定義されていて、 $x \rightarrow \infty$  で  $f(x, t) \rightarrow 0$ ,  $x = 0$  で境界条件

$$f(x = 0, t) = g(t) \tag{3}$$

( $g(t)$  は  $t < 0$  で  $g(t) = 0$  を満たす連続関数) を満たすとき、初期条件

$$f(x, t = 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

を満たすダランベールの解を求めよ。

### 第3問\* 前問において波動の力学的エネルギーの時間変化

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \varepsilon(x, t) dx \tag{5}$$

を  $g(t)$ ,  $T$ ,  $\rho$  のうち必要なものを用いて表せ。

\* は発展的問題