2014年度冬学期振動波動論 第三回講義 (10/20) に関連した問題
（担当：加藤雄介）　2014.10.20

理解度確認問題

第1問　緩和時間 過減衰、臨界減衰、減衰振動のうち、固有振動数 (ω_0) が同じなら、一番早く減衰するのはどれか。時間 t の関数が t が大きいところで、

$$F(t) = \exp(-t/\tau) \times \text{減衰しない関数またはべき関数} \tag{1}$$

で与えられるとき τ を緩和時間または減衰時間という。τ が短いとき「減衰が速い」などという。

第2問　緩和時間 減衰振動における緩和時間、過減衰における緩和時間を ω_0 と κ を用いて表せ。

第3問　2階定係数線形非同次方程式の特解 以下の微分方程式の特解（積分定数を含まない解）を求めよ.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = \exp x \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = \cos x \tag{3}$$

補足問題

第1問　2階定係数線形非同次方程式の一般解 微分方程式

$$L[y] = f(x), \quad L[y] \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by \tag{4}$$

の一般解が、その特解 $\tilde{y}(x)$ と、同次方程式 $L[y] = 0$ の一般解 $y_{\mathrm{homo}}(x)$ の和で与えられること

$$y = \tilde{y} + y_{\mathrm{homo}} \tag{5}$$

を示せ。

ヒント：$\bar{y} = y - \tilde{y}$ とおくと $L[\bar{y}] = 0$ が成り立つので、$\bar{y}(x) = y_{\mathrm{homo}}(x)$ とおける。

第2問　2階定係数線形非同次方程式の初期値問題 I 微分方程式

$$L[y] = \mathrm{e}^{\lambda' x} \tag{6}$$

の一般解は、λ' が特性方程式の根でなく、かつ特性方程式が重根を持たない場合

$$y = c_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + c_2 \mathrm{e}^{\beta x} + \frac{\mathrm{e}^{\lambda' x}}{\lambda'^2 + a\lambda' + b} \tag{7}$$

と表される。ただし、α, β は特性根である。このうち初期条件

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0 \tag{8}$$

を満たす解を求めよ。

第 3 問　2 階定係数線形非同次方程式の初期値問題 II 微分方程式

$$L[y] = \mathrm{e}^{\lambda' x} \tag{9}$$

において特性方程式が重根を持たず、かつ λ' が特性根のうちの一つと一致する場合の初期値問題の解を求めよ。

ヒント：前問の初期値問題の解において $\lambda' \to \alpha$ の極限を取る。

第 4 問　2 階定係数線形非同次方程式の初期値問題 III 微分方程式

$$L[y] = \mathrm{e}^{\lambda' x} \tag{10}$$

において特性方程式が重根を持ち、かつ λ' が特性根と一致する場合の初期値問題の解を求めよ。

ヒント：前問の初期値問題の解において $\beta \to \alpha$ の極限を取る。

第 5 問　強制振動の微分方程式の別解とインピーダンス 講義では、

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\kappa \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = f \cos\omega t \tag{11}$$

のとりあえずの解（＝特解）を５つのステップにわけて求めた。ここでは別の手順で以下のように解く。まず (11) の代わりに、

$$\frac{\mathrm{d}^2 \tilde{y}}{\mathrm{d}t^2} + 2\kappa \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \tilde{y} = f \exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{12}$$

を考える. (12) の解は一般には複素関数である。

1. (12) の解、$\tilde{y}$ の実部 $\mathrm{Re}(\tilde{y})$ は (11) を満たすことを示せ.
2. $\tilde{y} = B(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)$ とおき、(12) に代入し、$B(\omega)$ を求めよ.
3. $\mathrm{Re}(B(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t))$ を求めよ（これが、(11) の解になっている）.

注：このように、振動系の問題は、三角関数 $\cos\omega t$, 　$\sin\omega t$, を直接使うより、$\exp(\mathrm{i}\omega t)$ に対する応答を考え, その後、実部や虚部を取るという手順を採ると便利なことが多い。

演習問題

1-1 単振動を生じる系における強制振動のモデル

講義では時間に依存する外力 $F(t)$ を与えた場合の強制振動を考察したが、実際にはヨーヨーの強制振動の場合のように、振動系の一部を周期的に移動して強制振動を起こす場合が多い。その場合の運動方程式とその解析を考える。図 1 のような状況で、右側のばねの右端を

$$X(t) = a\cos\omega t \tag{13}$$

で強制的に振動させる（二つのばねが自然長にあるとき $X = 0$ となるように基準を定める)。このとき

1. おもりの運動方程式を書け。ただしおもりの原点 ($x = 0$) はふたつのばねが自然長にあるときにとるものとする。
2. 外力 $F(t)$ に相当するものは何か？
3. $x(t) = A\cos\omega t$ とおき、A を求めよ.
4. A のグラフを書け。

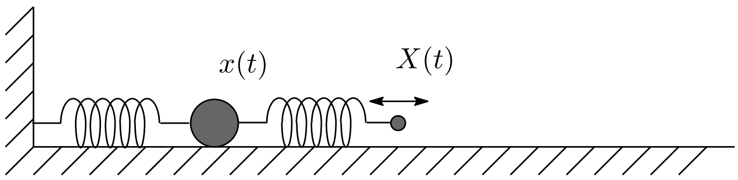

図 1: 振動子の強制振動

1-2 単振り子に対する強制振動のモデル

前問が「ヨーヨーの強制振動」に対応するとすれば、この問題は「傘やハンガーの強制振動」に対応する。図 2 のように振り子の支点を横方向に (13) で揺らすとき、振り子の微小振動に対する微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \cdots$$

を求めよ.

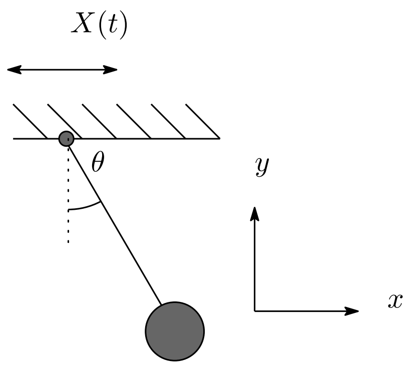

図 2: 単振り子の強制振動