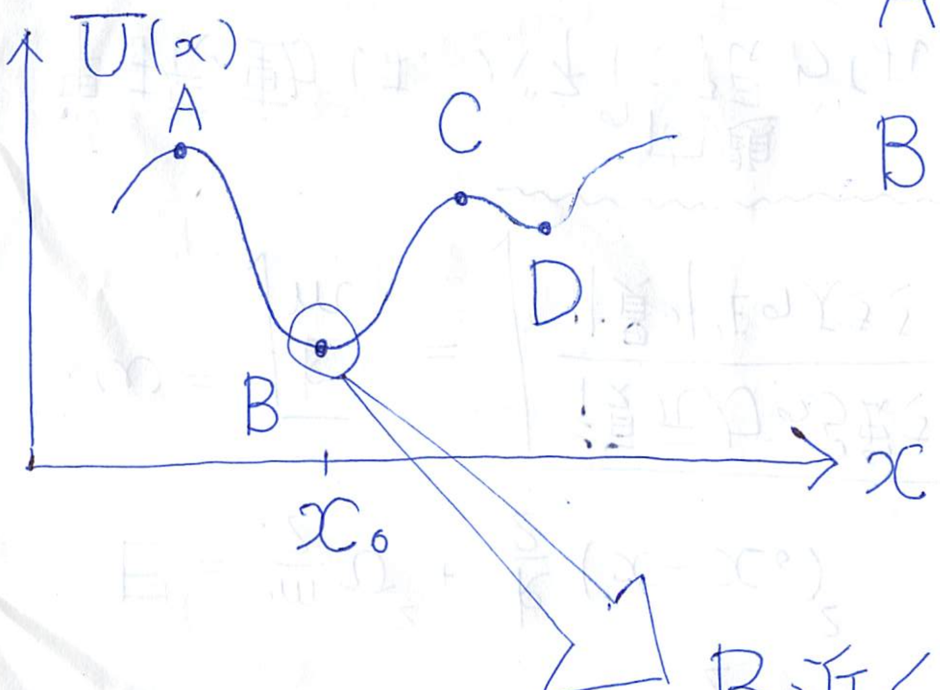
2014.10.6

1

1章 1自由度の振動

§ 単振動

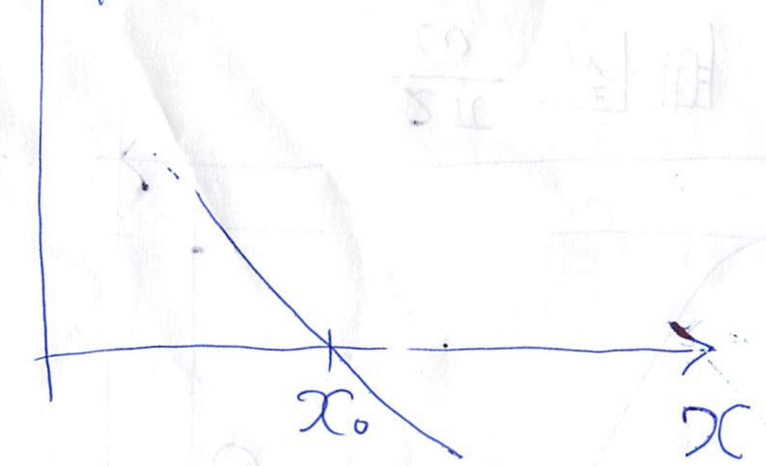


A, C 不安定な平衡点
B, D 安定な平衡点

B近くに静かにおく→微小振動

復元力
慣性
) ~~→振動~~

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$



$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}}_{\text{平衡点ではゼロ}}(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}}_{k(>0)\text{とおく}}(x-x_0)^2 + \underbrace{\cdots}_{\text{ムシする(※)}}$$

Taylor展開

※の近似の下で

$$F(x) \cong -k(x-x_0)$$

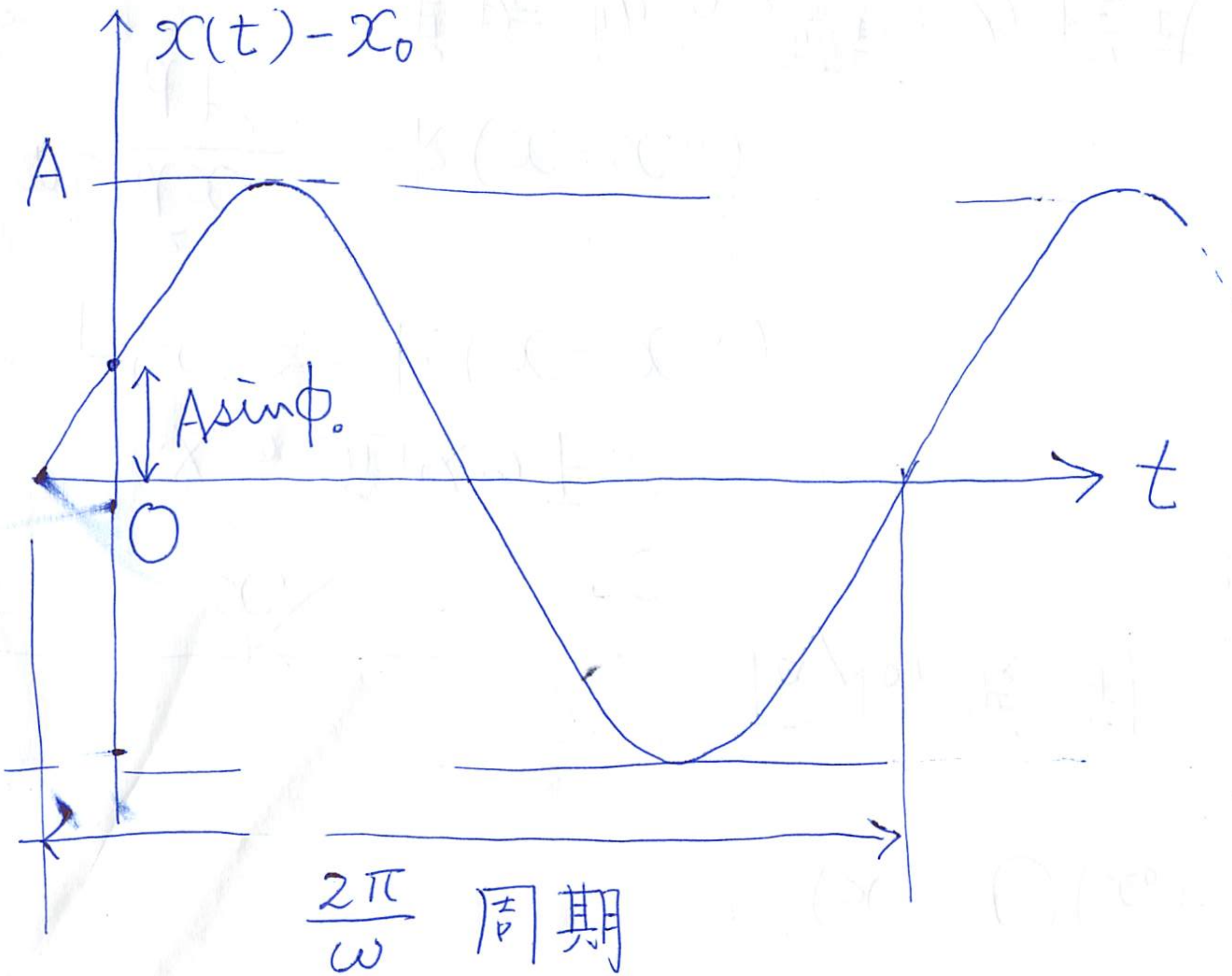
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_0)$$

単振動の運動方程式

$$x(t) - x_0 = A\sin(\omega t + \phi_0)\ ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{角振動数}$$

A 振幅 初期条件で決まる

ϕ_0 初期位相 積分定数



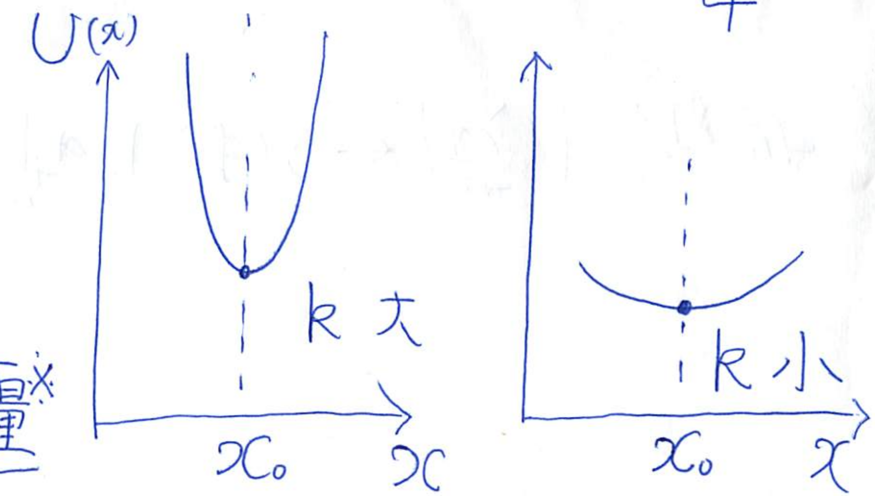
安定な平衡点まわりの微小振動＝単振動

2018.10.6

$$U(x) \cong U(x_0) + \frac{k}{2}(x-x_0)^2$$

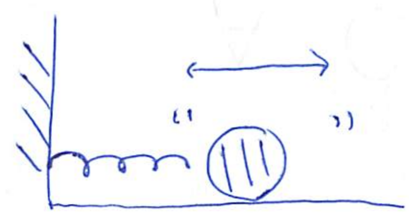
$$E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}(x-x_0)^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{復元力の強さを表す量}^{※}}{\text{慣性の大きさを〃}}}$$



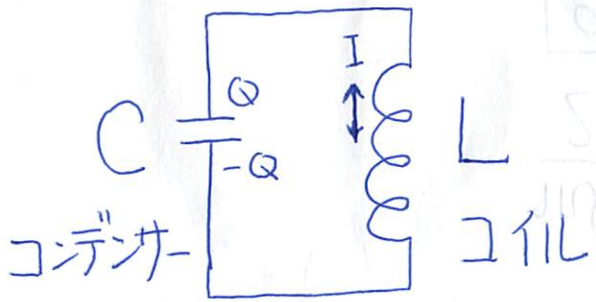
※上図参照

単振動はバネの問題に限らない



LC回路，単振り子，剛体振り子，弦の振動…

例1. LC回路では電流,電荷の振動が生じる

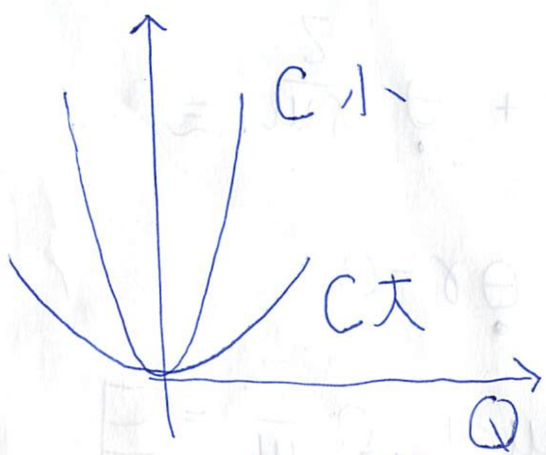


振動の周期 $2\pi\sqrt{LC}$　　L インダクタンス

〃 の固有角振動数 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$　　C キャパシタンス

電気的エネルギー

$$E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \quad \left(\longleftrightarrow E = \frac{k}{2}(x-x_0)^2 + \frac{m}{2}v^2 \right)$$



$Q \longleftrightarrow x-x_0$

$I \longleftrightarrow v$

$\frac{1}{C} \longleftrightarrow k$

$L \longleftrightarrow m$

$\frac{1}{C}$が復元力の強さ

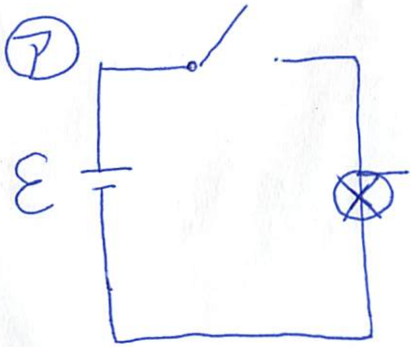
$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega \underset{\triangle}{\longleftrightarrow} \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$,　△の導出は演習問題

L；電流の時間変化のしにくさ(〜慣性)を表す

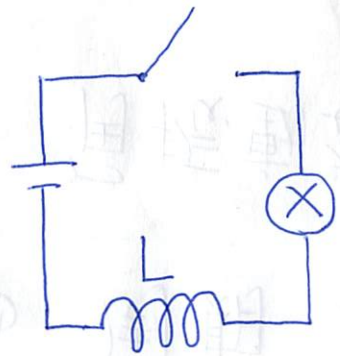
2014.10.6

6

ア



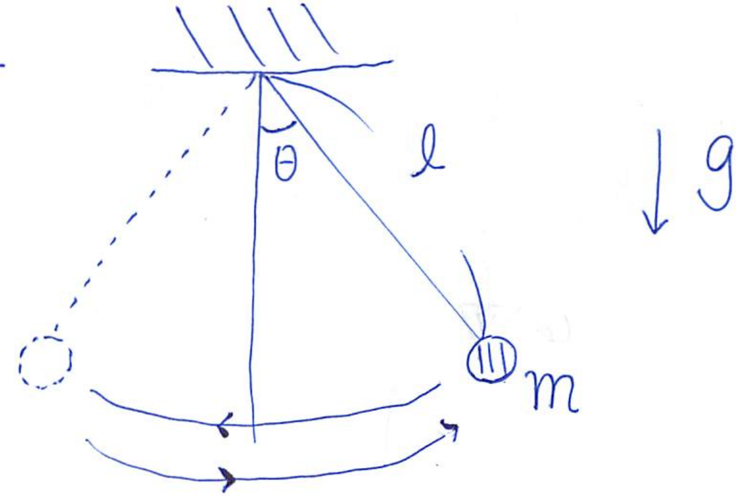
イ

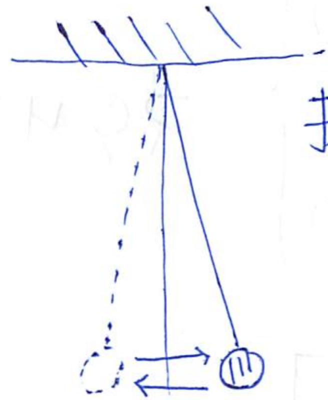


スイッチを入れると
- ア すぐに電球がつく
- イ しばらくしてようやく電球がつく.

△の

例2 単振子





振幅が小さければ 単振動と等価
(一学期力学)

周期 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

角振動数 $\sqrt{\frac{g}{l}}$

$$E = \frac{m}{2} v^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$v = l\dot{\theta} \quad , \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cancel{\frac{\theta^4}{4!}} + \cdots$$

$$\simeq \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2}\theta^2 \quad \left(\longleftrightarrow E = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 \right)$$

$$\theta \longleftrightarrow x - x_0$$

$$\dot{\theta} \longleftrightarrow v$$

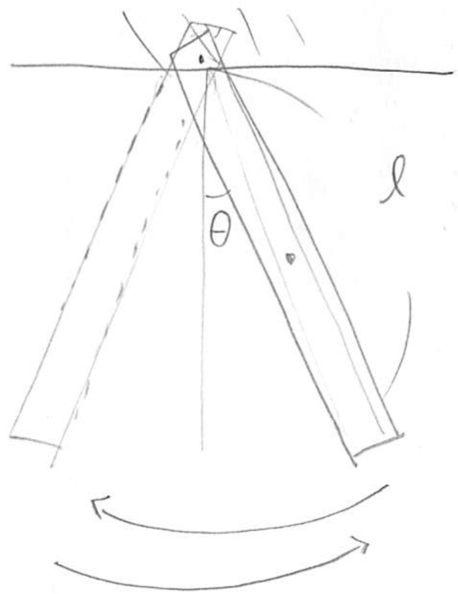
$$mgl \longleftrightarrow k$$

$$\frac{ml^2}{2} \longleftrightarrow m$$

$$\underline{\sqrt{\frac{g}{l}}} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

例3 剛体振り子

2014.10.6.



微小振幅近似

$$E = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + mg\left(\frac{\ell}{2}\right) \times \underbrace{(1-\cos\theta)}_{\simeq \frac{\theta^2}{2}} \sim \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mg}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)\theta^2$$

I … 慣性モーメント

$$I = \frac{m\ell^2}{3}$$

対応表

θ	x
$\dot{\theta}$	v
$\frac{mg\ell}{2}$	k
I	m
$\sqrt{\frac{mg\ell}{2I}} = \omega$	$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$