第4章 音波

§ 音波

音波(音)は空気の密度や圧力の時間的変動が空間を伝わっていく現象である。

日常会話においては音の伝わる速さを意識することはないが、落雷時においては音速が有限であることを実感できる。

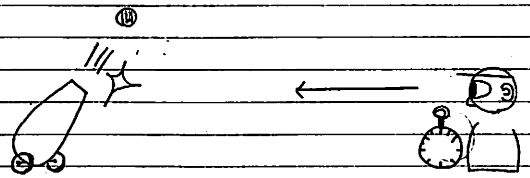
例題　落雷の閃光を見てから10秒後に雷鳴が聞こえた。落雷の位置はどれほど遠いか?

(光速 3.0×10^{8} m/s，音速 3.4×10^{2} m/s)

音速の測定

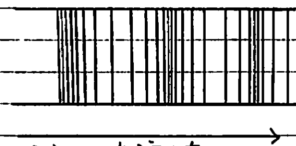
17世紀 イタリアで行われたらしい

大砲の閃光と爆発音の時間差から測定



音波を含む空気の振動，波動現象

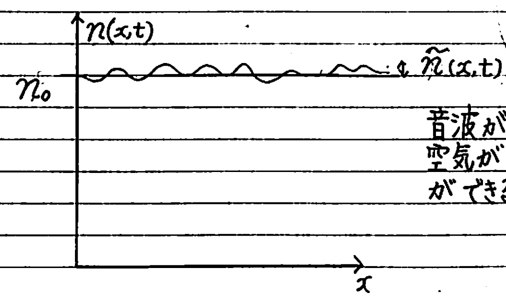
空気の圧力… 復元力
気体分子の質量… 慣性
$\}$ ⟶ 振動，波動の起源



空気の疎密波 = 音波

波動方程式の導出

- 運動方程式，連続の方程式(質量保存の法則)
- 仮定I 断熱過程，熱が伝わる前に波動が伝播
- 仮定II • 密度 $n(x,t) = n_0 + \underbrace{\tilde{n}(x,t)}_{\text{微小量}}$



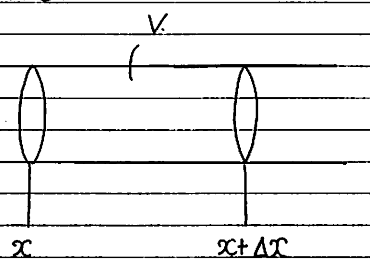
音波が生じたからといって空気がやたら薄い場所，濃い場所ができるわけではない。

§連続の方程式（1次元）

時刻 t, 場所 x において分子の平均速度 $v(x,t)$

〃　　分子の粒子数密度 $n(x,t)$

断面積 S の柱状領域中 $(x, x+\Delta x)$ の微小領域 V を考える.



連続の方程式は(粒子は自然発生したり自然消滅することはないので),

「V内の粒子の数の変化」

=「V内に入ってきた粒子数」−「V内から出ていった粒子数」

が成立することを指す

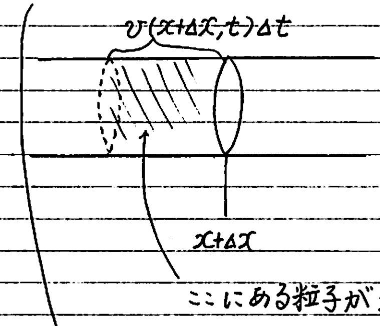
時刻 t〜t+Δt のV内粒子数の変化量

$$= S\int_x^{x+\Delta x} n(x', t+\Delta t)\,dx' - S\int_x^{x+\Delta x} n(x', t)\,dx' \quad (1)$$

$$= S\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial n(x',t)}{\partial t}\Delta t\,dx' + O((\Delta t)^2) \quad (1)$$

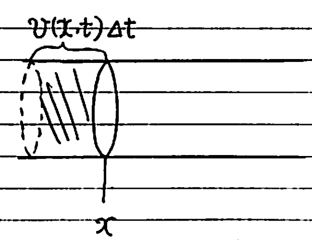
$$= S\,\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\Delta x \Delta t + O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2) \quad (1)$$

時刻 t〜t+Δt の間にV内から出ていく粒子数



$$n(x+\Delta x,t)\,v(x+\Delta x,t)\,\Delta t\,S \quad (2)$$

時刻 t〜t+Δt の間にV内に流れ込む粒子数は



$$n(x,t)\,v(x,t)\,\Delta t\,S \quad (3)$$

(1)(2)(3)より

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{-n(x+\Delta x,t)\,v(x+\Delta x,t) + n(x,t)\,v(x,t)}{\Delta x}$$

$$= -\frac{\partial (nv)}{\partial x}$$ これが連続の方程式

$n(x,t)=n_0+\tilde{n}(x,t)$ とわけると

n_0はx,tに依存しないので、連続の方程式は

$$\frac{\partial\tilde{n}(x,t)}{\partial t}+n_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=0$$

とかきなおせる。

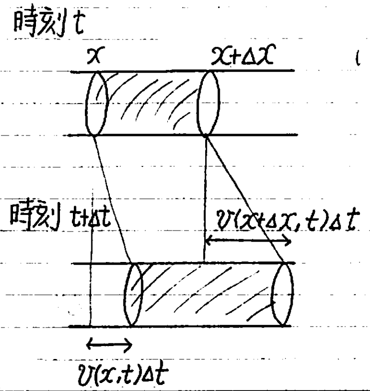
これより $\tilde{n}$ が微小量なら $\frac{\partial v}{\partial x}$ も微小量であることがわかる。

§ 音波の運動方程式（1次元）

波動方程式は連続の方程式と運動方程式を組み合わせ、微小振動近似（$\tilde{n}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ の2次の項ムシ）することで得られる。

運動方程式 $ma=F$ は

$\frac{d}{dt}(mv)=F$ と読み変えることができる

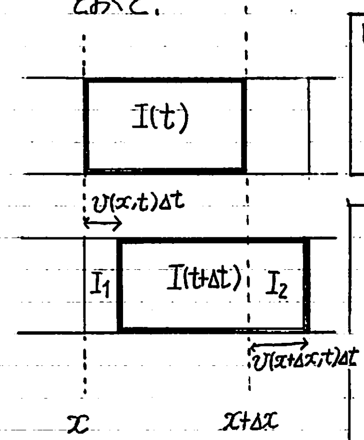


∴ 左図の斜線部の運動量変化は $t\sim t+\Delta t$ の間に受ける力積に等しい。

区間 $I(t)=[x,\ x+\Delta x]$

$I(t+\Delta t)=[x+v(x,t)\Delta t,\ x+\Delta x+v(x+\Delta x,t)\Delta t]$

とおくと、



時刻tの運動量

$$S\int_{I(t)} n(x',t)\,m\,v(x',t)\,dx'$$

t→Δt における運動量変化

$$S\int_{I(t+\Delta t)} n(x',t+\Delta t)\,m\,v(x',t+\Delta t)\,dx' - S\int_{I(t)} n(x',t)\,m\,v(x',t)\,dx'$$

ここで $\int_{I(t+\Delta t)}=\int_{I(t)}+\int_{I_2}-\int_{I_1}$ を用いると

∴

$$運動量変化=S\int_{I(t)} m\{n(x',t+\Delta t)v(x',t+\Delta t)-n(x',t)v(x',t)\}dx'$$

$$+S\left(\int_{I_2}-\int_{I_1}\right)m\,n(x',t+\Delta t)v(x',t+\Delta t)\,dx'$$

右辺第一項（被積分関数をtについてTaylor展開）

$$\Rightarrow Sm\left(\int_{I(t)}\frac{\partial n(x',t)v(x',t)}{\partial t}dx'\right)\Delta t+O((\Delta t)^2)=Sm\frac{\partial n(x,t)v(x,t)}{\partial t}\Delta t\Delta x$$

第二項については

$$S\int_{I_1}\cdots dx' = S\int_{x}^{x+v(x,t)\Delta t} mn(x',t+\Delta t)\,v(x',t+\Delta t)\,dx'$$

積分区間の幅 が微小量

$$= S\,mn(x,t+\Delta t)\,v(x,t+\Delta t)\,\overbrace{v(x,t)\Delta t} + O((\Delta t)^2)$$

$$= Smn(x,t)\,v^2(x,t)\,\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

同様に

違いは〜〜の部分

$$S\int_{I_2}\cdots dx' = Smn(x+\Delta x,t)\,v^2(x+\Delta x,t)\,\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

よって

$$S\int_{I_2}\cdots dx' - S\int_{I_1}\cdots dx' = Sm\left\{n(x+\Delta x,t)\,v^2(x+\Delta x,t) - n(x,t)\,v^2(x,t)\right\}\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

$$= Sm\,\frac{\partial(n(x,t)v^2(x,t))}{\partial x}\,\Delta t\Delta x + O((\Delta t)^2,(\Delta x)^2)$$

前ページの結果と合わせて

$t\to t+\Delta t$の運動量変化

$$= Sm\Delta t\Delta x\left\{\frac{\partial n(x,t)v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial n(x,t)v^2(x,t)}{\partial x}\right\}$$

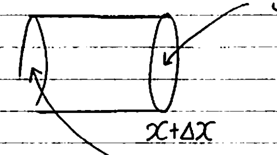
$$+\,O((\Delta t)^2,(\Delta x)^2)$$

以下 v^2に比例する項はムシ

よって運動量変化は

$$S\Delta t\Delta x \times m\,\frac{\partial n(x,t)v(x,t)}{\partial t} + \text{高次の微小量}$$

受ける力積は



この面で

$-P(x+\Delta x,t)S\Delta t$

$x+\Delta x$

この面で

$P(x,t)S\Delta t$

合わせて正味の力積

$$-\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\,S\Delta x\Delta t$$

〜〜の部分は等しいので

$$m\,\frac{\partial n(x,t)v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$

左辺は 高次の微小量を無視すると

$$m\left(\frac{\partial n}{\partial t}v + n\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$= m\left(\cancel{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}}v + n_0\frac{\partial v}{\partial t} + \cancel{\tilde{n}\frac{\partial v}{\partial t}}\right)$$ とかきかえられるので

運動方程式は

$$mn_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$ と単純化される

§ 音波の波動方程式（1次元）

連続の方程式 $\dfrac{\partial \tilde{n}(x,t)}{\partial t} + n_0 \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0$ ①

運動方程式 $m n_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}$ ②

①に $\dfrac{\partial}{\partial t}$ を作用させ、②に $\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial}{\partial x}$ を作用させて $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ を消去すると

$\dfrac{\partial^2 \tilde{n}(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$ を得る。③

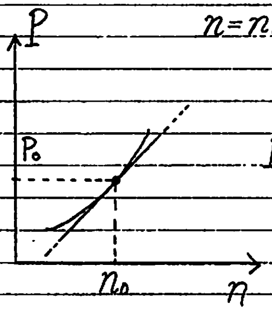
もう一つ $\tilde{n}$ と P を結びつける関係式が必要である。

圧力と密度にはどんな関係があるだろうか？

断熱過程では、$PV^{\gamma} = $ 一定　$\gamma = \begin{cases} \frac{7}{5} & 2原子分子 \\ \frac{5}{3} & 単原子分子 \end{cases}$

$\downarrow$

$P n^{-\gamma} = $ 一定



$n = n_0$ のときの圧力を P_0 とすると

$P n^{-\gamma} = P_0 n_0^{-\gamma}$

$P(x,t) = P_0 \left(\dfrac{n(x,t)}{n_0}\right)^{\gamma}$

$= P_0 \left(1 + \dfrac{\tilde{n}(x,t)}{n_0}\right)^{\gamma}$

$n \sim n_0$ 付近で線形近似

$\simeq P_0 + P_0 \gamma \dfrac{\tilde{n}(x,t)}{n_0}$

これより

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\gamma P_0}{n_0}\dfrac{\partial^2 \tilde{n}(x,t)}{\partial x^2}$

これを③に代入して

$\dfrac{\partial^2 \tilde{n}(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\gamma P_0}{m n_0}\dfrac{\partial^2 \tilde{n}(x,t)}{\partial x^2}$ を得る。

前ページ最後の式より $P(x,t) - P_0 \propto \tilde{n}(x,t)$

よって

$\dfrac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\gamma P_0}{m n_0}\dfrac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$

これらが大気の密度、圧力の振動を記述する波動方程式である。

$\dfrac{\gamma P_0}{m n_0}$ の次元、… $\left[\dfrac{\gamma P_0}{m n_0}\right] = \dfrac{L^3}{M} \times \dfrac{[F]}{L^2} = \dfrac{L}{\cancel{M}}\dfrac{\cancel{M}\cancel{L}}{T^2} = [速さ]^2$

大きさの評価

$\left(\dfrac{\gamma P_0}{m n_0}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{\gamma R T}{m}\right)^{1/2} \sim 343\ m/s$　$(T = 20^\circ C)$

実験値と一致

- 音速は温度が高いほど速く
- 分子量が大きいほど遅い

振動・波動論　演習問題（波動編）（担当：加藤雄介）　2005.01.16

以下では弦の張力は T、質量線密度は ρ で場所によらず一定であるものとする。

3-1 無限に続く弦の上の進行波の力学的エネルギー

振幅 $f(x,t)$ が

$$f(x,t) = F(x-vt). \quad v = \sqrt{T/\rho}$$

で与えられる進行波の力学的エネルギーを求めよ。波形 $F(x)$ が図 1 のように与えられるとき、そのエネルギーを求めよ.

3-2 無限に続く弦の上の波動に対するダランベールの解と初期値問題

1. $x \in (-\infty, \infty)$ に存在する弦に対する波動方程式の解のうち、初期値問題 $f_0(x)$, 初期速度分布 $v_0(x)$ を満たす解を求めよ.
2. $v_0(x) = 0$、$f_0(x)$ は図 1 のように与えられるとき、$\tau = \frac{l}{v}$ とおき、時刻

$$t = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\tau}{2}, \quad \frac{3\tau}{4}, \quad \tau$$

における弦の形を図で示せ。

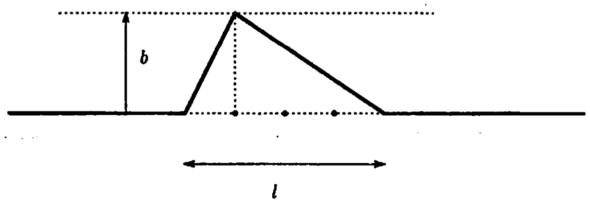


図 1:

3-3　両端固定弦の運動に対する初期値問題

$x \in (0,l)$ に存在する、両端を固定された弦に対する波動方程式の解のうち、初期値問題 $f_0(x)$, 初期速度分布 $v_0(x)$ を満たす解を求めよ

3-4 自由端と固定端を境界とする弦の運動に対するダランベール解

張力 T, 質量線密度 ρ の弦が $x \in (0,l)$ に存在し、左端 $x=0$ は自由端、右端 $x=l$ は固定端であるとする。

(1). 時刻 t における弦の変位 $y = f(x,t)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

に対するダランベールの解

$$f(x,t) = F(x-vt) + G(x+vt). \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{1}$$

に境界条件を課すと、$x \in (-\infty, \infty)$ における $F(x), G(x)$ の関数形についてどのようなことがいえるか？

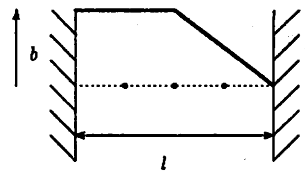


図 2:

(2). この弦を初期波形 $y = f_0(x)$ から、時刻 $t=0$ で静かに (初速度ゼロで) 離した。このとき、(1) における $F(x)$ を初期波形 $f_0(x)$ を用いて表せ。

(3). 初期波形 $y = f_0(x)$ が図 2 のような形のとき, $\tau = \frac{l}{v}$ とおき、時刻

$$t = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\tau}{2}, \quad \frac{3\tau}{4}, \quad \tau$$

における弦の形を図で示せ。

(4). 基準振動を求めよ。固有振動数の小さい方から数えて 3 番目までの基準振動についてその概形を図示せよ。

(5). この弦のエネルギーを求めよ。

(6). もっとも低い固有振動数をもつ基準振動に分配されるエネルギーは全体の何パーセントか？