2014 年度 力学 B (担当: 加藤雄介) レポート I 解答例

文責: 黒澤範行

2014 年 5 月 30 日

問題 I-8

初速 $0\,\mathrm{m/s}$ でスタートし、加速度 g で $100\,\mathrm{m}$ 落下する時間 t は

$$\frac{1}{2}gt^2 = 100\,\mathrm{m} \tag{1}$$

と書けるから $t = 4.5\,\mathrm{s}$ である。地面と平行方向の速度は

$$350\,\mathrm{km/h} = 350 \times 1000\,\mathrm{m} \times (3600\,\mathrm{s})^{-1} = 97.2\,\mathrm{m/s} \tag{2}$$

であるから横方向への移動距離は

$$97.2\,\mathrm{m/s} \times 4.5\,\mathrm{s} = 4.4 \times 10^2\,\mathrm{m} \tag{3}$$

である。また着地する瞬間の速度の、地面との垂直成分は

$$9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 4.5\,\mathrm{s} = 44\,\mathrm{m/s} \tag{4}$$

であり、水平成分は $97.2\,\mathrm{m/s}$ である。

参考: 単位の換算

単位を換算する際には、単位をただの常数だと思って計算すると分かりやすいです。例えば、問 8-I の解答例では、$350\,\mathrm{km/h}$ を $\mathrm{m/s}$ に換算する際に、km および h をただの常数だと思って、$350\,\mathrm{km/h}$ に $\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$、$\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$ を代入して $\mathrm{km/h}$ を $\mathrm{m/s}$ に変換しています。理論物理では、単位として通常のメートルや秒のかわりに物理常数である真空中の光速度 c やプランク常数 $\hbar$ を単位として用いることがしばしば行なわれます。このような場合の計算を考えると分かりやすいかもしれません。(1 秒や 1 メートルは特殊な “物理常数” とみなすことが可能です。)

問題 I-9

考える運動は半径 r の等速円運動だから、時刻 t での位置 $\boldsymbol{x}$ は円運動の中心を座標の原点にとれば (初期時刻を適当に調節して)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

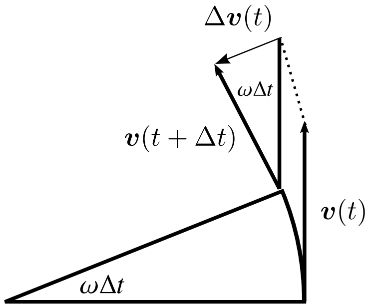

図 1　回転時の速度と加速度

と書くことができる。ただし周期を T としたとき $\omega = 2\pi/T$ である。速度 $\boldsymbol{v}$ および加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix}。 \tag{7}$$

よって速さ v は r と ω を用いて

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r\omega \tag{8}$$

と書くことができる。よって加速度の大きさ $a = |\boldsymbol{a}|$ は r と v を用いて

$$a = r\omega^2 = v^2/r \tag{9}$$

と書くことができる。

参考: 式の意味

式 (6) より、任意の時刻 t で $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ であることが分かります。つまり速度は円運動の中心を原点とした位置ベクトルに直交します。また (7) より $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{x}$ であり、つまり加速度は円運動の中心を向いています。この加速度に比例する力は向心力と呼ばれます。また、これらの式を図に書くと図 1 になります。時刻 t から $t+\Delta t$ での速度の変化を $\Delta v(t)$ としたとき、加速度の大きさ $a(t)$ は、Δt が十分に小さい時には

$$a(t) \simeq \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \simeq \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = v\omega \tag{10}$$

となっていることが分かります。

問題 I-10

問題 I-8 と同様に、落下するのにかかる時間 t は $gt^2/2 = 1.3\,\mathrm{m}$ と書けるから $t = 0.52\,\mathrm{s}$ である。よって地面と水平方向の速度は

$$\frac{10\,\mathrm{m}}{0.52\,\mathrm{s}} = 19\,\mathrm{m/s} \tag{11}$$

である。円運動の半径すなわちひもの長さは $1.5\,\mathrm{m}$ であるから、問題 9 より円運動中の加速度 a は

$$a = \frac{(19\,\mathrm{m/s})^2}{1.5\,\mathrm{m}} = 2.4 \times 10^2\,\mathrm{m/s^2} \tag{12}$$

である[*1]。

問題 I-10 (二つ目)

1.

力の重ね合わせの法則より、人が棒から受ける力は上向きに $(g - 3.00\,\mathrm{m/s^2}) \times 63\,\mathrm{kg} = 4.3 \times 10^2\,\mathrm{kg\,m/s^2}$。

2.

反作用の法則より、棒が受ける力は下向きに $4.3 \times 10^2\,\mathrm{kg\,m/s^2}$。

問題 I-11

1.

時刻 $t = 0.0\,\mathrm{s}$ で動き出したパックが時刻 T で停止したとする。動摩擦係数が一定だとすると摩擦によって受ける力は一定だから加速度の大きさ a も一定である。パックの初速は $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ であり時刻 T で停止するから、加速度の大きさは $a = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}/T$ である。この時パックが移動した距離 r は

$$\begin{aligned} r &= \int_0^T (10\,\mathrm{m} - at)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[10\,\mathrm{m} \times t - \frac{10\,\mathrm{m}}{2T} t^2\right]_{t=0}^{T} \\ &= \frac{5.0\,\mathrm{m}}{T} \end{aligned} \tag{13}$$

である。$r = 20\,\mathrm{m}$ を代入すると $T = 4\,\mathrm{s}$ となり、よって $a = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$ である。ゆえに摩擦力は $110\,\mathrm{g} \times a = 0.28\,\mathrm{kg\,m/s^2}$ である。

2.

垂直抗力は $110\,\mathrm{g} \times g = 1.1\,\mathrm{kg\,m/s^2}$ だから、動摩擦係数 μ は

$$\mu = \frac{0.28\,\mathrm{kg\,m/s^2}}{1.1\,\mathrm{kg\,m/s^2}} = 0.25 \tag{14}$$

である。

[*1] 有効数字の関係で、途中計算の仕方によっては $2.5 \times 10^2\,\mathrm{m/s^2}$ にもなりえます。