

2009 年度冬学期 電磁気学 A 演習問題 (1)(2)(3) 略解 (担当: 加藤雄介)
2010.01.27

演習問題 (1) 第 1 問. リング上に一様に分布した電荷が作る電場 電場の大きさ E は

$$E = \frac{|Q|x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

向きは x 軸に平行で、 $Q > 0$ ($Q < 0$) のとき原点から遠ざかる向き (原点に近づく向き) である。

演習問題 (1) 第 2 問. 円板上に一様に分布した電荷が軸線上に作る電場 電場の大きさ E は

$$E = \frac{|\sigma|x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

向きは x 軸に平行で、 $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$) のとき原点から遠ざかる向き (原点に近づく向き) である。 $a \rightarrow \infty$ のときは $E \rightarrow \sigma/(2\epsilon_0)$ となる。これは平行平板コンデンサーの片方の極板上の電荷が極板間に作る電場の大きさに等しい。

演習問題 (2) 第 1 問. リング上に一様に分布した電荷が作る電位 $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ となるように電位の基準を取ると

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

演習問題 (2) 第 2 問. 円板上に一様に分布した電荷が作る電位 $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ となるように電位の基準を取ると

$$\phi(x) = \frac{\sigma(\sqrt{x^2 + a^2} - x)}{2\epsilon_0}.$$

演習問題 (2) 第 3 問. 定ベクトル場の面積分 (数学) 曲面 S を微小面 ΔS_i (面積も同じ記号で表わす) に分割する。 ΔS_i の代表点の位置ベクトルを \vec{r}_i , 法線ベクトルを \vec{n}_i とし、 xy 面への射影面を ΔS_{0i} とする (面積も同じ記号で表わす)。このとき

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i V(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = V_0 \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \underbrace{\hat{z} \cdot \vec{n}_i \Delta S_i}_{\Delta S_{0i}} = V_0 S_0$$

となる。

演習問題 (2) 第 4 問. 円筒対称なベクトル場の面積分 (数学) $2\pi LRV(R)$

演習問題 (2) 第 5 問. 立体角 (数学) 天頂角 θ の面 S の立体角を $\Omega(\theta)$ と書き、 $\Delta\theta (> 0)$ を微小角とすると、 $\Omega(\theta + \Delta\theta) - \Omega(\theta)$ は $O((\Delta\theta)^2)$ の精度で、単位球面上における円周 $2\pi \sin \theta$ 、幅 $\Delta\theta$ の領域の面積に等しい。よって

$$\frac{d\Omega(\theta)}{d\theta} = 2\pi \sin \theta$$

となる。これを 0 から θ まで積分し、 $\Omega(0) = 0$ を用いれば、 $\Omega(\theta) = \underline{2\pi(1 - \cos \theta)}$ を得る (下線部は 2011 . 1.13 修正)。

演習問題 (2) 第 6 問. 球内に一様に分布した電荷による電場

1. $(1)=4\pi r^2 E(r)$.
2. S に囲まれる電荷は $r < a$ のとき Qr^3/a^3 , $r > a$ のとき Q .
3. $r < a$ のとき $E(r) = Qr/(4\pi\epsilon_0 a^3)$, $r > a$ のとき $E(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$,

演習問題 (2) 第 7 問. 円柱領域内に一様に分布した電荷による電場 点 P から円柱領域の軸線へ下ろした垂線の足を Q とする。距離 PQ を ρ とおくと、P における電場の大きさは

$$E(P) = \begin{cases} \frac{|\nu|\rho}{2\epsilon_0}, & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{|\nu|R^2}{2\epsilon_0\rho}, & R \leq \rho \end{cases}$$

で与えられる。電場の向きは、 $\nu > 0$ ($\nu < 0$) のとき \vec{PQ} と同じ (反対) 向きである。

‡ 導出には Gauss 則を用いる。

演習問題 (3) 第 1 問. 静電誘導 平板導体

1. $\sigma_1 + \sigma_2 = Q/S$.
2. $E_0 + E_1 = E_2$.
3. $E_i = \sigma_i/(2\epsilon_0)$.
4. $\sigma_1 = \frac{Q}{2S} - \epsilon_0 E_0$, $\sigma_2 = \frac{Q}{2S} + \epsilon_0 E_0$.

演習問題 (3) 第 2 問. 静電誘導 同心球導体

1. $4\pi a^2 \sigma_1 + 4\pi b^2 \sigma_2 = Q$.
2.
$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad \vec{E}_1 = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{\sigma_1 a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > a \end{cases}, \quad \vec{E}_2 = \begin{cases} 0, & r < b \\ \frac{\sigma_2 b^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b \end{cases}$$
3. $q + 4\pi a^2 \sigma_1 = 0$. ‡ 設問がおかしいですね
4. $\sigma_1 = -\frac{q}{4\pi a^2}$. $\sigma_2 = \frac{Q-q}{4\pi b^2}$.
5. $\lim_{|\vec{r}|\rightarrow a-0} \vec{E}(\vec{r}) = -\sigma_1 \hat{r}$, $\lim_{|\vec{r}|\rightarrow b+0} \vec{E}(\vec{r}) = \sigma_2 \hat{r}$ が成り立つ。これは静電平衡にある導体の性質のうちの一つ。