

2014 年度冬学期 振動波動論第二回講義 (10/15) に関連した問題 (担当: 加藤雄介) 2014.10.19

理解度確認問題

第 1 問 一自由度の振動系でエネルギー散逸を考える理由 一自由度の振動系でエネルギー散逸を考える意義を 3 つほど挙げよ。

第 2 問 2 階線形同次方程式の一般解 以下の微分方程式の、基本解と一般解を求めよ。

$$3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (3)$$

第 3 問 粘性流体中の単振り子; 標準形への落とし込み 質量 m 、半径 a の球形物体が長さ ℓ のひもを介して天井からつるされている。まわりの空気の粘性係数を η とし、物体が速さに比例する粘性抵抗力を受けるとき、微小振動に対する運動方程式を書け。この場合、講義で扱った「標準形」

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\kappa \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4)$$

における κ に相当するものは何か。与えられた物理量を用いて表せ。

第 4 問 標準形の運動の性質の分類 講義で扱った 2 階定係数線形微分方程式 (同次形) に関する定理から、(4) で表される系の運動の性質は κ と ω_0 の大小関係によってどのように変わると推測されるか。

補足問題

第 1 問 2 階定係数線形同次方程式の一般解の”証明”(特性方程式が重根を持たない場合) 微分方程式

$$L[y] = 0, \quad L[y] \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by \quad (5)$$

の一般解が、 $x = 0$ まわりの級数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \quad (6)$$

で表せるとして、二つの基本解の線形結合で表せることを以下の手順で示せ。ただし $a^2 - 4b \neq 0$ であるものとし、特性方程式の解 (特性根) を α, β とする。

1. c_n が 3 項漸化式

$$c_{n+2} + ac_{n+1} + bc_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

を満たすことを示せ。

2. (7) の一般解が

$$c_n = d_{\text{I}}\alpha^n + d_{\text{II}}\beta^n \quad (8)$$

で表せることを示せ。

3. (8) を (6) に代入して

$$y = d_{\text{I}}e^{\alpha x} + d_{\text{II}}e^{\beta x} \quad (9)$$

と書けることを示せ。

第2問 2階定係数線形同次方程式の一般解の”証明”(特性方程式が重根を持つ場合) 前問で、 $a^2 - 4b = 0$ が成り立つとしても、同様な議論で、一般解を求めることができる。

1. 三項漸化式 (7) の一般解を求めよ。
2. その解を (6) に代入して (5) に対する一般解を求めよ。