力学 B 演習問題 IV（担当：加藤雄介）　2013.07.24

第 1 問　リング状の物体の慣性モーメント 半径 a、質量 M のリング状の物体がある。リングの軸線上まわりの慣性モーメントを以下の手順によって求めよ。ただし質量は一様に分布しているものとする（質量密度が場所によらず一定であるとする）。またリングの幅（外径と内径の差）は a に比べて十分小さいものとする。

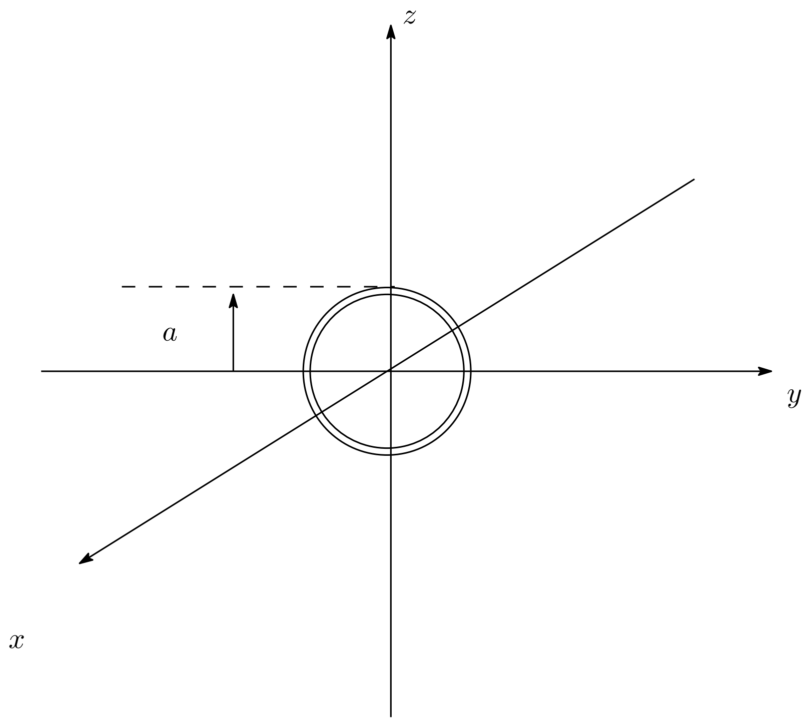

図 1:

- まずリングを微小領域に分割する。微小領域は角度 θ_i,θ_{i+1} の線に挟まれた領域とする。
- i 内の微量領域の代表点と軸線の距離を r_i とし、質量を m_i として $\sum_i m_i r_i^2$ を求める。
- 十分細かく分割した極限 ($\lim_{\mathrm{Max}(\theta_{i+1}-\theta_i)\to 0}$) をとる。

第 2 問 円板の慣性モーメント 半径 a、質量 m の円板の慣性モーメント I を以下の手順で求めよ。ただし回転軸は円板の中心を貫き、円板表面に垂直にとるものとする。

- まず円板を N 個の同心リングに領域に分割する。i 番目のリングの内径 r_{i-1} と外径 r_i の差は十分小さいとする。$r_0 = 0,\ r_{N+1} = a$ とする。
- $I = \sum_{i=1}^{N} I_i$ を示す。

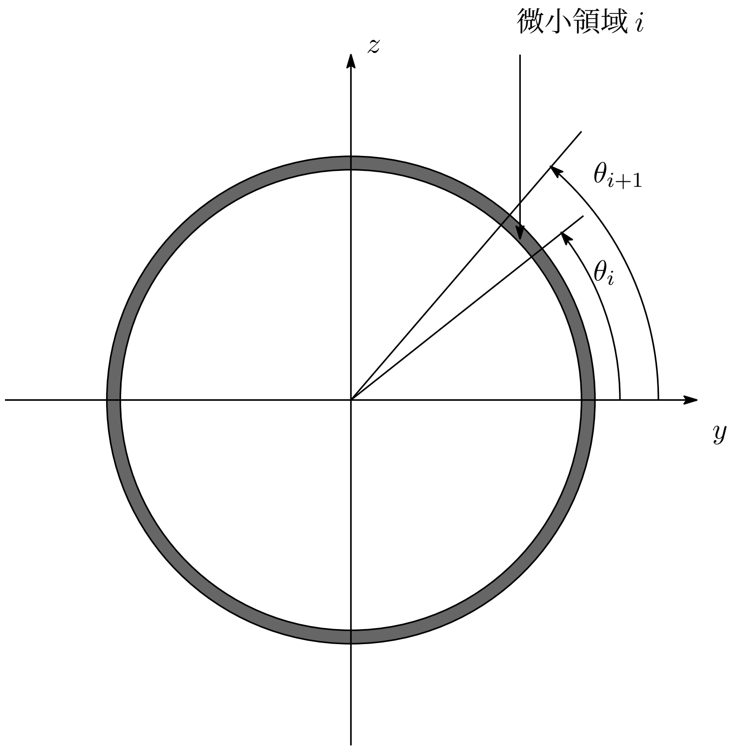

図 2:

- 単位面積当たりの質量（質量面密度）$M/(\pi a^2)$ を σ として i 番目のリングの慣性モーメント I_i を σ, r_{i-1}, r_i を用いて表す。
- 十分細かく分割した極限 ($\lim_{\mathrm{Max}(r_{i+1}-r_i)\to 0}$) をとる。このとき

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\mathrm{Max}(r_{i+1}-r_i)\to 0} \sum_{i=1}^{N} \pi\sigma(r_{i+1}^2 - r_i^2) r_i^2 &(1)\\
&= \pi\sigma \lim_{\mathrm{Max}(r_{i+1}-r_i)\to 0} \sum_{i=1}^{N} (r_{i+1}^2 - r_i^2) r_i^2 &(2)
\end{aligned}
$$

  を区分求積法を用いて評価し、I を σ, a^2 を用いて表す。
- I を M, a^2 を用いて表す。

補足説明　区分求積法：

$$x_0(=a) < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n(=b)$$

または

$$x_0(=a) > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n(=b)$$

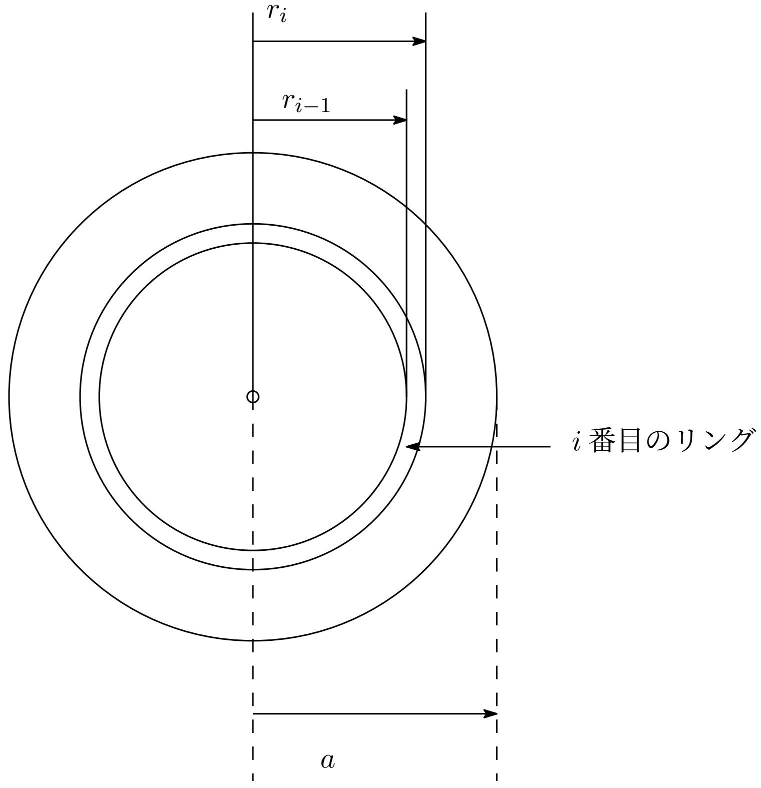

図 3:

となる $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ において $n \to \infty$ かつ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ がどの $k \in [0, n-1]$ に対してもゼロに収束する極限を $\lim_{\Delta x_k \to 0}$ と表す。$x \in [a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

が成り立つ。これらの関係式を用いて数列和の極限を積分を用いて評価する方法をここでは区分求積法と呼んでいる。

注：$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} (\equiv \Delta x)$, $x_k = x_0 + (k-1)\Delta x$ であれば既習の内容のはず。分割区間の幅 $|\Delta x_k|$ が不揃い (k に依存するということ) である場合でも $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a$, かつ $|\Delta x_k| \to 0$ であれば、これまでに習ってきた区分求積法と同様な手法を用いることができる。

第 3 問　力のモーメント 図 4 の棒は、●を打った点を通り紙面に垂直な軸周りに自由に回転できるものとする。棒にかかる力 $\vec{F_1}, \cdots, \vec{F_5}$ のうち、回転軸周りの力のモーメント（トルク）の大きさの大きいものから順に並べよ。ただしすべての力の大きさは等しいものとする。

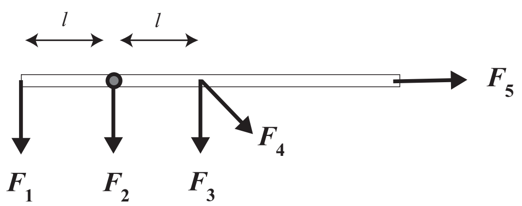

図 4:

第 4 問　剛体の回転の運動方程式 図 5 のように半径 R, 質量 M, 慣性モーメント I の円盤にひもを巻きつけ、その先に質量 M のおもりをぶら下げたところ、おもりが一定の加速度で下降した。円盤の中心を通り紙面に垂直な軸まわりで、円盤は自由に回転できるものとする。ひもの質量は無視できるものとする。

1. おもりの加速度の大きさと円盤の角加速度の大きさを求めよ。
2. ひもの張力の大きさを求めよ。

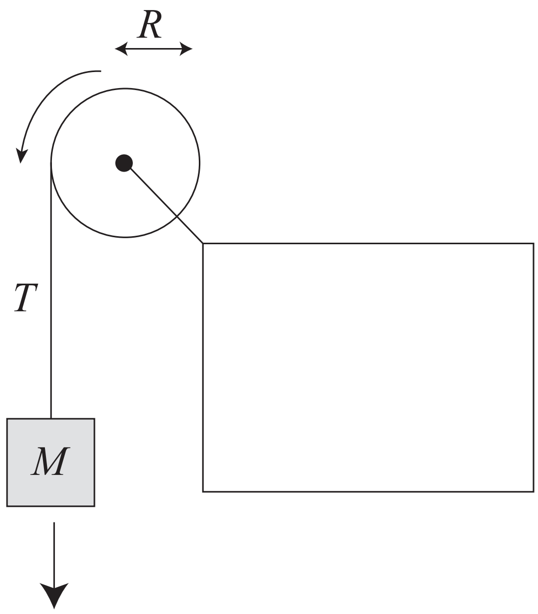

図 5:

第 5 問　剛体の回転の運動方程式 図 6 に示すように、太さと質量の無視できる棒が、固定軸まわりに自由に回転できるようになっている。棒が掃く面は、鉛直軸を含むものとする。固定回転軸から距離 l_1 のところに質量 m_1 のおもりを固定し, 固定回転軸から距離 l_2 のところに質量 m_2 のおもりを固定する。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ.

1. 剛体の運動エネルギー（二つのおもりの運動エネルギーの和）を角速度 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ と m_1, m_2, l_1, l_2 とを用いて表せ。
2. 棒の軸が水平になる状態 $(\theta = \pi/2)$ で静止させ、そこで手を離したとする。その後の運動において、棒の軸が鉛直軸と平行 $(\theta = 0)$ になるときの角速度 ω の大きさを求めよ.
3. 角加速度 $\alpha = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$ を、慣性モーメント I と固定回転軸まわりの力のモーメント τ を用いて表せ。
4. τ は $\tau_0 \sin\theta$ と表すことができる. τ_0 を m_1, m_2, l_1, l_2, g を用いて表せ。
5. 剛体の振り子運動の振幅が小さく $\sin\theta \sim \theta$ と近似できるとき、剛体の運動は単振動と等価であることを示せ.
6. 前問における剛体の運動の周期を τ_0 と I を用いて表せ.

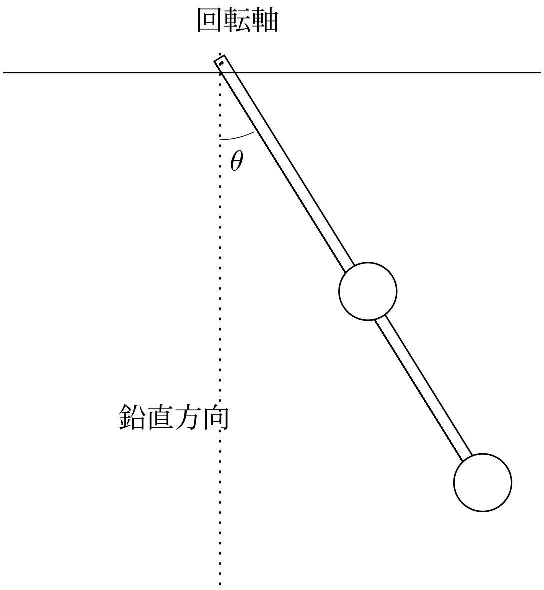

図 6: