2009年度冬学期　電磁気学A　演習問題(1)(2)(3)略解（担当：加藤雄介）
2010.01.27

演習問題(1)第1問．リング上に一様に分布した電荷が作る電場 電場の大きさ E は

$$E = \frac{|Q|x}{4\pi\epsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

向きは x 軸に平行で、$Q>0(Q<0)$ のとき原点から遠ざかる向き（原点に近づく向き）である。

演習問題(1)第2問．円板上に一様に分布した電荷が軸線上に作る電場 電場の大きさ E は

$$E = \frac{|\sigma|x}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

向きは x 軸に平行で、$\sigma>0(\sigma<0)$ のとき原点から遠ざかる向き（原点に近づく向き）である。$a\to\infty$ のときは $E\to\sigma/(2\epsilon_0)$ となる。これは平行平板コンデンサーの片方の極板上の電荷が極板間に作る電場の大きさに等しい。

演習問題(2)第1問．リング上に一様に分布した電荷が作る電位 $\phi(x\to\pm\infty)=0$ となるように電位の基準を取ると

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}.$$

演習問題(2)第2問．円板上に一様に分布した電荷が作る電位 $\phi(x\to\pm\infty)=0$ となるように電位の基準を取ると

$$\phi(x) = \frac{\sigma(\sqrt{x^2+a^2}-x)}{2\epsilon_0}.$$

演習問題(2)第3問．定ベクトル場の面積分（数学） 曲面 S を微小面 ΔS_i（面積も同じ記号で表わす）に分割する。ΔS_i の代表点の位置ベクトルを $\vec{r}_i$, 法線ベクトルを $\vec{n}_i$ とし、xy 面への射影面を ΔS_{0i} とする（面積も同じ記号で表わす)。このとき

$$\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i V(\vec{r}_i)\cdot\vec{n}_i\Delta S_i = V_0\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \underbrace{\hat{z}\cdot\vec{n}_i\Delta S_i}_{\Delta S_{0i}} = V_0 S_0$$

となる。

演習問題(2)第4問．円筒対称なベクトル場の面積分（数学） $2\pi LRV(R)$

演習問題(2)第5問．立体角（数学） 天頂角 θ の面 S の立体角を $\Omega(\theta)$ と書き、$\Delta\theta(>0)$ を微小角とすると、$\Omega(\theta+\Delta\theta)-\Omega(\theta)$ は $\mathcal{O}((\Delta\theta)^2)$ の精度で、単位球面上における円周 $2\pi\sin\theta$、幅 $\Delta\theta$ の領域の面積に等しい。よって

$$\frac{\mathrm{d}\Omega(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 2\pi\sin\theta$$

となる。これを0から θ まで積分し、$\Omega(0)=0$ を用いれば、$\Omega(\theta)=2\pi(1-\sin\theta)$ を得る。

演習問題 (2) 第 6 問. 球内に一様に分布した電荷による電場

1. (1)$=4\pi r^2 E(r)$.
2. S に囲まれる電荷は $r < a$ のとき Qr^3/a^3, $r > a$ のとき Q.
3. $r < a$ のとき $E(r) = Qr/(4\pi\epsilon_0 a^3)$, $r > a$ のとき $E(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$,

演習問題 (2) 第 7 問. 円柱領域内に一様に分布した電荷による電場 点 P から円柱領域の軸線へ下ろした垂線の足を Q とする。距離 PQ を ρ とおくと、P における電場の大きさは

$$E(\mathrm{P}) = \begin{cases} \frac{|\nu|\rho}{2\epsilon_0}, & 0 \le \rho \le R \\ \\ \frac{|\nu|R^2}{2\epsilon_0\rho}, & R \le \rho \end{cases}$$

で与えられる。電場の向きは、$\nu > 0 (\nu < 0)$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ (反対) 向きである。

$\sharp$ 導出には Gauss 則を用いる。

演習問題 (3) 第 1 問. 静電誘導　平板導体

1. $\sigma_1 + \sigma_2 = Q/S$.
2. $E_0 + E_1 = E_2$.
3. $E_i = \sigma_i/(2\epsilon_0)$.
4. $\sigma_1 = \frac{Q}{2S} - \epsilon_0 E_0, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2S} + \epsilon_0 E_0$.

演習問題 (3) 第 2 問. 静電誘導　同心球導体

1. $4\pi a^2 \sigma_1 + 4\pi b^2 \sigma_2 = Q$.
2. $$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_1 = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{\sigma_1 a^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}, & r > a \end{cases}, \quad \vec{E}_2 = \begin{cases} 0, & r < b \\ \frac{\sigma_2 b^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}, & r > b \end{cases}$$
3. $q + 4\pi a^2 \sigma_1 = 0$. $\sharp$ **設問がおかしいですね**
4. $\sigma_1 = -\frac{q}{4\pi a^2}$. $\sigma_2 = \frac{Q-q}{4\pi b^2}$.
5. $\lim_{|\vec{r}|\to a-0} \vec{E}(\vec{r}) = -\sigma_1 \hat{r}$, $\lim_{|\vec{r}|\to b+0} \vec{E}(\vec{r}) = \sigma_2 \hat{r}$ が成り立つ。これは静電平衡にある導体の性質のうちのひとつ。