

量子物性特論 B 演習問題 (2) 「超伝導・超流動」

担当：加藤雄介 2014.07.28

問題 II-1 BCS 波動関数の凝集エネルギー

BCS 基底状態のエネルギーとフェルミ球状態のエネルギーの差を凝集エネルギーとよぶ。凝集エネルギーが ($\Delta \ll \hbar\omega_D$ の条件下で)

$$E_0(\Delta) - E_0(\Delta = 0) = -\frac{\Omega N(0)\Delta^2}{2} \quad (1)$$

で与えられることを示せ。 Ω は体積、 $N(0)$ は単位体積、上向きスピンあたりの一粒子状態密度のフェルミ面における値を表すものとする。

BCS 理論における一粒子状態密度

$$N_s(\epsilon) = \frac{1}{\Omega} \sum_k \delta\left(\epsilon - \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k}\right)$$

を求め、図示せよ。但し常伝導状態における状態密度

$$N_n(\epsilon) = \frac{1}{\Omega} \sum_k \delta(\epsilon - \xi_k)$$

のエネルギー依存性は無視できるものとし、フェルミ面における値 $N_n(0)$ で置き換えてよいとせよ。

問題 II-2 「自由電子の非超流動性」 絶対零度の自由電子系において、 $Q_T(\mathbf{q} \rightarrow 0)$ の値を求め、超流動密度がゼロであることを示せ。

問題 II-3 「理想ボース気体の “超流動性”」 理想ボース気体において $Q_T(\mathbf{q} \rightarrow 0)$ の値を求めよ。ただし結果の物理的意義については講義でのコメント参照のこと。

問題 II-4 「古典結晶では非対角長距離秩序は存在しないこと具体例」 $\phi_0(\mathbf{r})$ は原点のまわりに局在した一粒子波動関数であるとし、

$$\int |\phi_0(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1$$

と規格化されているものとする。このとき N 粒子系波動関数

$$\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} \phi_0(\mathbf{r}_{\sigma(1)} - \mathbf{R}_1) \phi_0(\mathbf{r}_{\sigma(2)} - \mathbf{R}_2) \cdots \phi_0(\mathbf{r}_{\sigma(N)} - \mathbf{R}_N) \quad (2)$$

について考える。ここで $\mathbf{R}_i$ ($i = 1, \dots, N$) はブラベー格子の格子点の位置ベクトル、 σ は置換を表す。一粒子波動関数同士の重なり積分

$$\int \phi_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j)$$

は $\mathbf{R}_i$ と $\mathbf{R}_j$ が同一の格子点または最近接格子点であるときのみゼロでない値をとるものとする。このとき (2) は非対角長距離秩序を持たないことを示せ (Matsuda-Tsuneto 1970)。