

量子物性特論 B 演習問題 (II) 「ボース系超流動」

担当：加藤雄介 2010.07.04

問題 II-1 「粒子数演算子」スピン 0 のボース粒子について、粒子流密度演算子が

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2im} \left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}) - (\nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \right] \quad (1)$$

で与えられることを示せ。

問題 II-2 「理想ボース気体の動的構造因子」絶対零度において、中性ボース粒子の中性子散乱強度は、密度揺らぎの動的構造因子

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \sum_m |\langle m | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_m + E_g) \quad \hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \quad (2)$$

に比例する (Ω は体積を表す)。 $|g\rangle$ は基底状態の状態ベクトルであり、そのエネルギー固有値を E_g としている。絶対零度の自由ボース気体について、 $S(\mathbf{q}, \omega)$ を求めよ。

問題 II-3 「Bogoliubov 模型の動的構造因子」 Bogoliubov 理論において、絶対零度の動的構造因子 (2) の低周波数、長波長領域における表式 (漸近形) を求めよ。

問題 II-4 「Bogoliubov 変換」ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}(\neq 0)} (\epsilon_{\mathbf{k}} + \Delta) \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \frac{\Delta}{2} \sum_{\mathbf{k}(\neq 0)} (\hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}}^\dagger) \quad (3)$$

で与えられるとき以下の問いに答えよ。

1. $[\hat{H}, \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger]$ を計算せよ。
2. $[\hat{H}, \hat{c}_{-\mathbf{k}}]$ を計算せよ。

上の $\hat{H}$ に対して

$$[\hat{H}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger] = E_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \quad (4)$$

$$[\hat{H}, \hat{b}_{\mathbf{k}}] = -E_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (5)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad (6)$$

を満たす演算子 $\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ を求めたい。1,2 の結果から、

$$\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}}$$

($u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{k}$ の大きさだけの関数) とおく。

1. $|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$ を示せ。
2. $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}, E_{\mathbf{k}}$ を求めよ。
3. $\hat{H}$ を $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}}$ を用いて表わせ。

問題 II-5 「横応答関数の式変形」

$$Q_T(\mathbf{q}) = - \lim_{\eta \rightarrow +0} i \int_0^\infty dt \exp(-\eta t) \langle [\boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{q}, t), \boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{j}}(-\mathbf{q})] \rangle \quad (7)$$

は

$$Q_T(\mathbf{q}) = -2 \sum_l \frac{|\langle l | \boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{j}}(-\mathbf{q}) | g \rangle|^2}{E_l - E_g} \quad (8)$$

と表すことができることを示せ。\$|g\rangle\$, \$|l\rangle\$ はそれぞれ基底状態、励起状態の状態ベクトルを表す。\$\boldsymbol{\eta}_\mathbf{q}\$ は、

$$\boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} \perp \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} = \boldsymbol{\eta}_\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{-\mathbf{q}} = 1$$

を満たすベクトルであり、\$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{q})\$ は、粒子流密度のフーリエ成分

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$$

問題 II-6 「理想ボース気体の“超流動性”」理想ボース気体において \$Q_T(\mathbf{q} \rightarrow 0)\$ の値を求めよ。ただし結果の物理的意義については講義でのコメント参照のこと。

問題 II-7 「単一モード近似の下での超流動性」ヘリウム 4 では単一モード近似が成立すると仮定し、\$|\Phi_\mathbf{q}\rangle = \rho_\mathbf{q} |g\rangle\$ がエネルギー固有状態と見做せるとして \$Q_T(\mathbf{q} \rightarrow 0)\$ の値を求めよ。\$|g\rangle\$ は回転不変であるとし、また励起エネルギーは長波長領域において、フォノン型分散 \$\epsilon \sim u|\mathbf{q}|\$ (\$u > 0\$) であるとせよ。

問題 II-8 「自由電子の非超流動性」絶対零度の自由電子系において、\$Q_T(\mathbf{q} \rightarrow 0)\$ の値を求め、超流動密度がゼロであることを示せ。

問題 II-9 「古典結晶では非対角長距離秩序は存在しないことの具体例」\$\phi_0(\mathbf{r})\$ は原点のまわりに局在した一粒子波動関数であるとし、

$$\int |\phi_0(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1$$

と規格化されているものとする。このとき \$N\$ 粒子系波動関数

$$\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_\sigma \phi_0(\mathbf{r}_{\sigma(1)} - \mathbf{R}_1) \phi_0(\mathbf{r}_{\sigma(2)} - \mathbf{R}_2) \dots \phi_0(\mathbf{r}_{\sigma(N)} - \mathbf{R}_N) \quad (9)$$

について考える。ここで \$\mathbf{R}_i\$ (\$i = 1, \dots, N\$) はブラベー格子の格子点の位置ベクトル、\$\sigma\$ は置換を表す。一粒子波動関数同士の重なり積分

$$\int \phi_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j)$$

は \$\mathbf{R}_i\$ と \$\mathbf{R}_j\$ が同一の格子点または最近接格子点であるときのみゼロでない値をとるものとする。このとき (9) は非対角長距離秩序を持たないことを示せ (Matsuda-Tsuneto 1970)。