

講義はスライドと板書を用いて行いますが、補足資料として講義メモをアップロードします。

1 Ginzburg-Landau 理論

第二種超伝導体の相転移は 2 次転移である。従って、ランダウ理論が適用できるであろう。超伝導の本質は量子現象がマクロなレベルで現れることであるから、波動関数 $\Psi (\in \mathbb{C})$ 型の秩序変数で特徴付けられるであろう。

ゼロ磁場の常伝導状態 (normal state) から測った超伝導状態の自由エネルギー密度は転移点 T_c 近傍で以下のように与えられる。

$$f = f_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 \quad (1)$$

α は温度 T の関数として転移点で符号を変え、転移点近傍では

$$\alpha(T) \sim \alpha'(T - T_c), \quad \alpha' > 0 \quad (2)$$

と近似できる。 β は転移点 T_c 付近で常に正なので、定数としてよい。空間変化があり、かつベクトルポテンシャルも存在するとき、自由エネルギーは $\Psi(\mathbf{r})$ の汎関数として

$$F[\Psi] = V f_n + \int_V d\mathbf{r} \left[\alpha |\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta |\Psi(\mathbf{r})|^4}{2} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \Psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} \right] \quad (3)$$

$$= \int_V d\mathbf{r} \left[\alpha |\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta |\Psi(\mathbf{r})|^4}{2} - \frac{\hbar^2 \Psi^*(\mathbf{r})}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} \right] \quad (4)$$

V は体積、 f_n は自由エネルギー密度である。積分は三次元領域 V で行うものとする。ここでの自由エネルギーは物質場のエネルギーと電磁場のエネルギーを両方含むものとする。ここで e^*, m^* は凝縮している物体の構成粒子の電荷と質量であり、 $e^* = 2e < 0$ (e は電気素量)、 $m^* = 2m$ (m は電子質量) を念頭においている (ほかの箇所では $*$ は複素共役を表すのに用いる)。 μ_0 は真空の透磁率を表す。 $B^2/(2\mu_0)$ は磁場のエネルギー密度である。2 行目の表式は運動エネルギー項を部分積分を用い、部分積分の境界項がゼロであると仮定して書き換えたものである。

1.1 空間一様解 (第一種超伝導体の相転移の理論)

マイスナー状態では $\mathbf{A} = 0$ かつ $\nabla \Psi = 0$ がなりたち、(3) は

$$F = V f_n + V \left(\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 \right) \quad (5)$$

となる。 $T < T_c$ における安定解は

$$\Psi = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}} e^{i\phi} \quad (6)$$

(ϕ は位相因子) となり、

$$F/V = f_n - \underbrace{\frac{|\alpha|^2}{2\beta}}_{f_{sn}} \quad (7)$$

となる。 f_{sn} は超伝導状態 (s) と常伝導状態 (n) のヘルムホルツの自由エネルギー密度差の大きさである。

ゼロ磁場の相転移は 2 次転移である。ゼロ磁場の転移温度付近でエントロピー密度 (単位体積あたりのエントロピー) s は

$$s = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial T} = \begin{cases} s_n + \frac{(\alpha')^2}{\beta} (T - T_c) & T < T_c \\ s_n (= -T \frac{\partial f_n}{\partial T}) & T > T_c \end{cases} \quad (8)$$

となる。これを見るとエントロピーは転移点で連続であり、その微分は不連続である。ゼロ磁場の転移温度付近で比熱 (単位体積あたりの熱容量) c は

$$c = T \frac{\partial s}{\partial T} = \begin{cases} c_n + \frac{T(\alpha')^2}{\beta} & T < T_c \\ c_n (= -T \frac{\partial s_n}{\partial T}) & T > T_c \end{cases} \quad (9)$$

となる。これを見ると比熱は転移点で不連続であり、2 次転移でみられる振舞いを確認できる。これらの結果は実験結果 (スライド資料) とよく一致している。

次に第一種超伝導体の磁場中相転移を GL 理論で議論する。第一種超伝導体の外部磁場 H と物質内部の磁場 B の関係は

$$B = \begin{cases} 0, & \mu_0 H < B_c \quad \text{超伝導状態 (マイスナー状態)} \\ H, & \mu_0 H > B_c \quad \text{常伝導状態} \end{cases} \quad (10)$$

となる。ここで B_c は熱力学的臨界磁場という。

外部磁場中でもマイスナー状態ではヘルムホルツの自由エネルギーは (7) で与えられ、常伝導状態では

$$\frac{F}{V} = f_n + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (11)$$

となる。外部磁場 $\mu_0 H$ の下で相を決めるのはギブズの自由エネルギー

$$G = F - VBH \quad (12)$$

である。各相での G は

$$\frac{G}{V} = \begin{cases} f_n - f_{sn} & \text{超伝導状態} \\ f_n - \frac{\mu_0 H^2}{2} & \text{常伝導状態} \end{cases} \quad (13)$$

となる。二つの相はそれぞれ

$$f_{sn} > \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad \text{マイスナー状態が安定相} \quad (14)$$

$$f_{sn} < \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad \text{常伝導状態が安定相} \quad (15)$$

となる。これより、

$$\frac{B_c^2}{2\mu_0} = f_{sn} \quad (16)$$

となる。また安定相は

$$\mu_0 H < B_c \quad \text{マイスナー状態が安定相} \quad (17)$$

$$\mu_0 H > B_c \quad \text{常伝導状態が安定相} \quad (18)$$

となる。

1.2 コヒーレンス長

以下の便宜のため

$$\Psi = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} \psi \quad (19)$$

とおくと自由エネルギーは次のように表される：

$$\begin{aligned} F &= V f_n + \int_V \left[\text{sgn}(T - T_c) \frac{\alpha^2}{\beta} |\psi|^2 + \frac{\alpha^2}{2\beta} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2 |\alpha|}{2m^* \beta} \left| \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi \right|^2 \right] d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} \\ &= V f_n + 2f_{sn} \int_V \left[\text{sgn}(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} + \xi^2 \left(\nabla + \frac{ie^* \mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi^* \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi \right] d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} \\ &= V f_n + 2f_{sn} \int_V \left[\text{sgn}(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} - \xi^2 \psi^* \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \psi \right] d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (20)$$

2行目で長さの次元を持つ以下の物理量（これをコヒーレンス長とよぶ）

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|}} \quad (21)$$

を導入した。 ξ は秩序変数の空間変化を特徴づける長さのスケールであり、転移点 T_c 近くで

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

のように発散する。最後の行は部分積分で空間勾配のある項を書き直した。

1.3 Ginzburg-Landau 方程式

停留条件

$$\frac{\delta F}{\delta \psi^*(\mathbf{r})} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{r})} = 0 \quad (23)$$

それぞれから方程式を求める。最初の式からは Ginzburg-Landau(GL) 方程式

$$\text{sgn}(T - T_c) \psi(\mathbf{r}) + |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) - \xi^2 \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (24)$$

が得られる。これは自由エネルギーの式 (20) の 3 行目（最右辺）の式を用いると直ちに出てくる。(23) の 2 番目の式からは、(20) の 2 行目の式と

$$\delta \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = \int_{\text{全空間}} \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} \quad (25)$$

を用いて

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{2f_{sn} e^* \xi^2}{i\hbar} \left\{ \psi^*(\mathbf{r}) \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \left(\nabla + \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \psi^*(\mathbf{r}) \right\} \quad (26)$$

が得られるので、Ampère 則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ と比べて電流密度の表式

$$\mathbf{j} = \frac{2f_{sn} e^* \xi^2}{i\hbar} \left\{ \psi^*(\mathbf{r}) \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \left(\nabla + \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \psi^*(\mathbf{r}) \right\} \quad (27)$$

が得られる。

(25) の導出 :

$$\delta \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = \int_{\text{全空間}} \frac{(\nabla \times (A + \delta A))^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} - \int_{\text{全空間}} \frac{(\nabla \times A)^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{全空間}} \underbrace{(\nabla \times A) \cdot (\nabla \times \delta A)}_B d\mathbf{r} \quad (28)$$

ここでベクトル場 $C(\mathbf{r}), D(\mathbf{r})$ に対して成り立つベクトル解析の関係式*

$$\nabla \cdot (C \times D) = D \cdot (\nabla \times C) - C \cdot (\nabla \times D) \quad (29)$$

で $C = \delta A, D = B$ とすれば、

$$\nabla \cdot (\delta A \times B) = B \cdot (\nabla \times \delta A) - \delta A \cdot (\nabla \times B) \quad (30)$$

これを (28) に用い、またガウスの法則を用いると

$$\delta \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{全空間}} \delta A \cdot (\nabla \times B) d\mathbf{r} + \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{無限遠表面}} dS \cdot (\delta A \times B) \quad (31)$$

となる。無限遠で B または δA が十分速やかにゼロに近づくものとするすると右辺第二項はゼロとなり、(25) が得られる。

(25) の導出終わり

(29) を Feynman の電磁気学 (Feynman Lectures) のやり方での導出する。

1. まず ∇ を C だけを微分する ∇_C と D だけを微分する ∇_D に分ける ($\nabla \rightarrow \nabla_C + \nabla_D$)。

$$\nabla \cdot (C \times D) \rightarrow \nabla_C \cdot (C \times D) + \nabla_D \cdot (C \times D) \quad (32)$$

2. C を ∇_C の右側、 ∇_D の左側になるように変形する。

$$\nabla_C \cdot (C \times D) = (\nabla_C \times C) \cdot D = D \cdot (\nabla_C \times C) \quad (33)$$

3. D を ∇_D の右側、 ∇_C の左側になるように変形する。

$$\nabla_D \cdot (C \times D) = -\nabla_D \cdot (D \times C) = -(\nabla_D \times D) \cdot C = -C \cdot (\nabla_D \times D) \quad (34)$$

4. ∇_C, ∇_D を ∇ に置き換える。

$$D \cdot (\nabla_C \times C) \rightarrow D \cdot (\nabla \times C) \quad (35)$$

$$C \cdot (\nabla_D \times D) \rightarrow C \cdot (\nabla \times D) \quad (36)$$

このようにして (29) が導かれる。(導出終わり)

(27) において $\psi = 1$ ($\Psi = \sqrt{-\alpha/\beta}$) とおくと

$$j(r) = -4 \left(\frac{e^* \xi}{\hbar} \right)^2 f_{\text{sn}} A(r) = -2 \left(\frac{2\pi\xi}{\phi_0} \right)^2 \frac{B_c^2}{\mu_0} A(r) \quad (37)$$

となる。ただし $\phi_0 = h/e^*$ と置いた。この式と London 方程式

$$j(r) = -\frac{A(r)}{\mu_0 \lambda^2} \quad (38)$$

を比べると

$$2 \left(\frac{2\pi\xi B_c}{\phi_0} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (39)$$

これを B_c について解くと

$$B_c = \frac{|\phi_0|}{2\sqrt{2}\pi\lambda\xi} \quad (40)$$

もし超伝導状態が空間一様相 (Meissner 相) に限られるなら、磁場中の常伝導相から超伝導相への相転移は B_c でおきる。しかしもし超伝導状態として空間変化している相の方が、空間的に一様な超伝導相よりエネルギー的に安定であれば、より高い磁場で常伝導相と超伝導相の間の相転移が起こりうる。

1.4 上部臨界磁場

(導出その 1): 常伝導状態 $\psi = 0$ から

$$-\psi - \xi^2 \left(\nabla - \frac{ie^* A}{\hbar} \right)^2 \psi + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (41)$$

がゼロでない解を持つ状態への 2 次転移は、与えられた温度 $T (< T_c)$ で ψ について 1 次の項がゼロになる

$$-\psi - \xi^2 \left(\nabla - \frac{ie^* A}{\hbar} \right)^2 \psi = 0 \quad (42)$$

最も高い磁場で起こる。この方程式を書き直したもの

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^* A}{\hbar} \right)^2 \psi = \frac{\hbar^2}{2m^* \xi^2} \psi \quad (43)$$

と磁場中の Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^* A}{\hbar} \right)^2 \psi = E \psi \quad (44)$$

を比べよう。この Schrödinger の固有値は

$$E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_c = \frac{e^* B}{m^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

に量子化される。(43) と (44) を比べると

$$\frac{\hbar^2}{2m^* \xi^2} \leftrightarrow \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (46)$$

の対応がある。与えられた温度 T 、つまり与えられた ξ の下で、これが成立する最も高い磁場 (= 上部臨界磁場 B_{c2}) は $n = 0$ の場合に対応し、

$$\frac{\hbar^2}{2m^*\xi^2} = \frac{\hbar e^* B_{c2}}{2m^*} \quad (47)$$

よって

$$B_{c2} = \frac{|\phi_0|}{2\pi\xi^2}, \quad \phi_0 = \frac{h}{e^*} \quad (48)$$

となる。(40) と (48) を比べると

$$\frac{\lambda}{\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (49)$$

のとき、高い外部磁場を下げて行くと $\mu_0 H = B_c$ での一次転移が起こる前に $H = B_{c2}$ での 2 次転移が先に起きる。(49) が成り立ち、 $\mu_0 H = B_{c2}$ での 2 次転移が起きる超伝導体を第二種超伝導体という。

$$\frac{\lambda}{\xi} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

が成り立ち、 $\mu_0 H = B_c$ での 1 次転移が起きる超伝導体を第一種超伝導体という。

(B_{c2} の導出その 2) 磁場中の Schrödinger 方程式の知識を使わない

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ie^* A_\mu}{\hbar}, \quad \mu = x, y \quad (51)$$

と置く。 D_x, D_y は反エルミート演算子 $D_x^\dagger = -D_x$, $D_y^\dagger = -D_y$ となる。交換関係は

$$[D_x, D_y] = -\frac{ie^*}{\hbar} (\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -\frac{ie^* B_z}{\hbar} \quad (52)$$

で与えられる。 $B = B \cdot z$ として、

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{2|e^* B|}} (iD_x - \text{sgn}(e^* B) D_y) \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2|e^* B|}} (iD_x + \text{sgn}(e^* B) D_y) \quad (53)$$

と置くと、

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (54)$$

となる。 D_x, D_y を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を用いて表すと

$$iD_x = \sqrt{\frac{|e^* B|}{2\hbar}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad D_y = \text{sgn}(e^* B) \sqrt{\frac{|e^* B|}{2\hbar}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (55)$$

$$-\left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}}{\hbar}\right)^2 = -D_x^2 - D_y^2 \quad (56)$$

$$= \frac{|e^* B|}{2\hbar} \left((\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \right) \quad (57)$$

$$= \frac{|e^* B|}{\hbar} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{|e^* B|}{\hbar} (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) \quad (58)$$

より

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\text{sgn}(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} - \xi^2 \psi^* \left(\nabla - \frac{i e^* \mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \psi \right] d\mathbf{r} \\ &= \int_V \left[\frac{2\xi^2 |e^* B|}{\hbar} (\psi^* \hat{a}^\dagger \hat{a} \psi) + \left(\frac{\xi^2 |e^* B|}{\hbar} + \text{sgn}(T - T_c) \right) |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} \right] d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (59)$$

となる。 $T > T_c$, $\psi \neq 0$ のとき, どの項も正なので $\psi \neq 0$ の解は, $\psi = 0$ より安定にはなり得ない。 $T < T_c$ かつ $\frac{\xi^2 |e^* B|}{\hbar} > 1$, $\psi \neq 0$ のときも, (59) のどの項も正なので $\psi \neq 0$ の解は, $\psi = 0$ より安定にはなり得ない。一方 $T < T_c$ かつ $\frac{\xi^2 |e^* B|}{\hbar} < 1$ のとき, $\hat{a}\psi = 0$ なら, (59) は

$$\int_V \left[\left(\frac{\xi^2 |e^* B|}{\hbar} - 1 \right) |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} \right] d\mathbf{r} \quad (60)$$

となるので, $\psi \neq 0$ が安定な解になり得る。条件式

$$\xi^2 \frac{|e^* B|}{\hbar} = 1 \quad (61)$$

を書き換えると

$$|B| = \frac{|\phi_0|}{2\pi\xi^2} \quad (62)$$

となり, 先ほどの上部臨界磁場 B_{c2} と一致する。

1.5 界面エネルギー

なぜ第二種超伝導体では, B_{c2} 以下で, 空間的に非一様な超伝導状態が安定になるのかを理解するために, 超伝導相と常伝導相の間の界面エネルギーを計算しよう。その準備として $T < T_c$ における GL の自由エネルギーを

$$\begin{aligned} F &= V f_n + \int_V \left[\text{sgn}(T - T_c) \frac{\alpha^2}{\beta} |\psi|^2 + \frac{\alpha^2}{2\beta} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2 |\alpha|}{2m^* \beta} \left| \left(\nabla - \frac{i e^* \mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi \right|^2 \right] d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} \\ &= V f_n + \frac{B_c^2}{\mu_0} \int_V \left[-|\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} - \xi^2 \psi^* \left(\nabla - \frac{i e^* \mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \psi \right] d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (63)$$

を GL 方程式

$$-\psi + |\psi|^2 \psi - \xi^2 \left(\nabla - \frac{i e^* \mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \psi = 0 \quad (64)$$

を用いて書き換える。(64) に ψ^* を掛けて

$$-|\psi|^2 + |\psi|^4 - \xi^2 \psi^* \left(\nabla - \frac{i e^* \mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \psi = 0 \quad (65)$$

この式の左辺を (63) の右辺の被積分関数から差し引いて

$$F = V f_n - \frac{B_c^2}{2\mu_0} \int_V |\psi|^4 d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} \quad (66)$$

ギブズの自由エネルギー

$$G = F - \int_{\text{全空間}} d\mathbf{r} B H = V f_n - \frac{B_c^2}{2\mu_0} \int_V |\psi|^4 d\mathbf{r} + \int_{\text{全空間}} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} - B H \right) d\mathbf{r} \quad (67)$$

を常伝導相 $\psi = 0$, $B = \mu_0 H$ のそれ G_n から差し引くと

$$\Delta G = G - G_n = \int_V \frac{(B - \mu_0 H)^2 - B_c^2 |\psi|^4}{2\mu_0} d\mathbf{r} \quad (68)$$

となる。 $\mu_0 H = B_c$ のとき $B = 0$, $\psi = 1$ (一様な超伝導相) でも $\Delta G = 0$ となる。常伝導相と超伝導相の界面 (yz 方向には一様) のエネルギーを考えるために

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(x) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(x)\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(x)\mathbf{e}_z \quad (69)$$

として、境界条件

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty, \quad \psi(x) &\rightarrow 0, \quad B \rightarrow \mu_0 H \\ x \rightarrow +\infty, \quad \psi(x) &\rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (70)$$

の下での解を考える。

このとき GL 方程式は

$$-\psi + \psi^3 - \xi^2 \left(\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \left(\frac{e^* A(x)}{\hbar} \right)^2 \psi(x) \right) = 0 \quad (71)$$

となる。

1. $\lambda \ll \xi$ のとき (第 1 種極限) 磁場は λ 程度のスケールで変化するので、

$$\begin{aligned} B &\simeq \mu_0 H = B_c, & x \leq x_0 - \lambda \\ B &\simeq 0, & x \geq x_0 + \lambda \end{aligned} \quad (72)$$

よって、GL 方程式は

$$\begin{aligned} \psi(x) &\simeq 0 & x \leq x_0 - \lambda \\ -\psi + \psi^3 - \xi^2 \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} &\simeq 0, & x \geq x_0 + \lambda \end{aligned} \quad (73)$$

となる。この解は

$$\begin{aligned} \psi(x) &\simeq 0 & x \leq x_0 - \lambda \\ \psi(x) &\sim \tanh\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\xi}\right) & x \geq x_0 + \lambda \end{aligned} \quad (74)$$

で与えられ、界面エネルギーは

$$\Delta G = S \int_{x_0-\lambda}^{x_0+\lambda} dx \frac{(B - B_c)^2 - B_c^2 |\psi|^4}{2\mu_0} + S \int_{x_0+\lambda}^{\infty} dx \frac{(B - \mu_0 H)^2 - B_c^2 |\psi|^4}{2\mu_0} \quad (75)$$

$$\sim S O\left(\frac{B_c^2 \lambda}{2\mu_0}\right) + S \int_{x_0+\lambda}^{\infty} dx \frac{B_c^2 (1 - |\psi|^4)}{2\mu_0} = S \frac{B_c^2 \xi}{2\mu_0} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + O\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) \right) > 0 \quad (76)$$

界面エネルギーは正である。

上の計算の最後で

$$\int_0^{\infty} (1 - \tanh^4 \eta) d\eta = \int_0^{\infty} (1 + \tanh^2 \eta) \underbrace{(1 - \tanh^2 \eta)}_{d(\tanh \eta)} d\eta = \left[\tanh \eta + \frac{\tanh^3 \eta}{3} \right]_0^{\infty} = \frac{4}{3} \quad (77)$$

を用いた。

2. $\lambda \gg \xi$ のとき (第2種極限) ψ は ξ 程度のスケールで変化するので、

$$\begin{aligned}\psi &\simeq 0 & x &\leq x_0 - \xi \\ \psi &\simeq 1 & x &\geq x_0 + \xi\end{aligned}\quad (78)$$

となる。磁場は London 方程式の解

$$\begin{aligned}B(x) &\simeq B_c & x &\leq x_0 - \xi \\ B(x) &\simeq B_c e^{-(x-x_0)/\lambda} & x &\geq x_0 + \xi\end{aligned}\quad (79)$$

界面エネルギーは

$$\Delta G = S \int_{x_0-\xi}^{x_0+\xi} dx \frac{(B-B_c)^2 - B_c^2 |\psi|^4}{2\mu_0} + S \int_{x_0+\xi}^{\infty} dx \frac{(B-B_c)^2 - B_c^2 |\psi|^4}{2\mu_0} \quad (80)$$

$$\sim S O\left(\frac{B_c^2 \xi}{2\mu_0}\right) + S \frac{B_c^2}{2\mu_0} \int_{x_0+\xi}^{\infty} dx \left((1 - e^{-x/\lambda})^2 - 1\right) = -S \frac{B_c^2 \lambda}{2\mu_0} \left(\frac{3}{2} + O\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right) < 0 \quad (81)$$

界面エネルギーは負になる。

3. $\lambda = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ のとき

まず GL 方程式 (71) を書き換える

$$[\partial_x, A(x)] = B(x) \quad (82)$$

より

$$\left(\partial_x - \frac{e^* A(x)}{\hbar}\right) \left(\partial_x + \frac{e^* A(x)}{\hbar}\right) - \frac{e^* B(x)}{\hbar} = \partial_x^2 - \left(\frac{e^* A(x)}{\hbar}\right)^2 \quad (83)$$

となるので、GL 方程式 (71) は

$$-\psi + \psi^3 - \xi^2 \left(\partial_x - \frac{e^* A(x)}{\hbar}\right) \left(\partial_x + \frac{e^* A(x)}{\hbar}\right) \psi + \underbrace{\frac{\xi^2 e^* B(x)}{\hbar}}_{B(x)/B_{c2}} \psi = 0 \quad (84)$$

となる。 $\lambda = \xi/\sqrt{2}$ のとき $B_{c2} = B_c$ であるから、

$$\left(\partial_x + \frac{e^* A(x)}{\hbar}\right) \psi = 0, \quad B(x) = B_c (1 - \psi^2(x)) \quad (85)$$

ならば、これは GL 方程式の解になる。一方で Ampere 則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = -\frac{\psi^2 \mathbf{A}}{\mu_0 \lambda^2} \quad (86)$$

は

$$\partial_x B(x) = -\mu_0 j_y = \frac{\psi^2 A(x)}{\lambda^2} \quad (87)$$

となる。(85) の第二式を x で微分し、第一式を用いると

$$\partial_x B(x) = 2B_{c2} (-\psi \partial_x \psi) = 2B_{c2} \psi \left(\frac{e^* A(x) \psi}{\hbar}\right) = \frac{2\psi^2 A(x)}{\xi^2} \quad (88)$$

これは $\lambda = \xi / \sqrt{2}$ のとき (87) に他ならない。よって $\lambda = \xi / \sqrt{2}$ のとき (85) を満たす解 $\psi(x)$ は GL 方程式と Ampere 則の両方を満たし、かつ境界条件 (70) も満たす。この解を界面エネルギーの式 (68) の被積分関数で $\mu_0 H = B_c$ とした式

$$(B - B_c)^2 - B_c^2 |\psi|^4 = (B - B_c(1 - \psi^2))(B - B_c(1 + \psi^2)) \quad (89)$$

に代入すれば、ゼロになる。よって $\lambda = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ のときの界面エネルギーはゼロである。

1.6 下部臨界磁場、孤立量子渦

秩序変数を

$$\psi(r) = f(r)e^{i\chi(r)} \quad (90)$$

と書くと (64) は

$$\begin{aligned} & -f(r) + f^3(r) - \xi^2 \left(\nabla + i\nabla\chi(r) - \frac{ie^*A(r)}{\hbar} \right)^2 f(r) \\ & = -f(r) + f^3(r) - \xi^2 \left(\nabla - \frac{ie^*Q(r)}{\hbar} \right)^2 f(r) = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

$$Q(r) = A(r) - \frac{\hbar \nabla \chi}{e^*} \quad (92)$$

となる。 $Q(r)$ はゲージ不変なベクトルポテンシャルとみなすことができる。 f と Q を用いると電流密度 ((86) を参照) は

$$j = -\frac{f^2(r)Q(r)}{\mu_0 \lambda^2}, \quad (93)$$

(91) を実部と虚部にわけると、それぞれ

$$-f(r) + f^3(r) - \xi^2 \nabla^2 f(r) + \left(\frac{\xi e^* Q}{\hbar} \right)^2 f = 0 \quad (94)$$

$$\nabla \cdot (f^2(r)Q(r)) = 0 \quad (95)$$

となる。(93) を用いると (95) は

$$\nabla \cdot j = 0 \quad (96)$$

と書き直せる。 $\nabla \cdot A = 0$ のゲージで Ampere の法則は

$$\nabla^2 A(r) = \frac{f^2(r)Q(r)}{\lambda^2} \quad (97)$$

とも表される。自由エネルギー (4) を B_c , ξ , f , Q を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} F &= V f_n + \frac{B_c^2}{\mu_0} \int_V d\mathbf{r} \left[-f^2 + \frac{f^4}{2} - \xi^2 f \nabla^2 f + \left(\frac{\xi e^* Q f}{\hbar} \right)^2 \right] + \int_V d\mathbf{r} \frac{B^2(r)}{2\mu_0} \\ &= V f_n + \frac{B_c^2}{\mu_0} \int_V d\mathbf{r} \left[-f^2 + \frac{f^4}{2} - \xi^2 f \nabla^2 f \right] + \int_V d\mathbf{r} \left(\frac{\mu_0 \lambda^2 j^2}{2} + \frac{B^2(r)}{2\mu_0} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

となる。一行目で GL 方程式の虚部 (95) を用い、2 行目では、 B_c, B_{c2} の表式と (93) を用いた。

直線状の量子渦一本を有する超伝導状態における自由エネルギーとゼロ磁場の超伝導状態の自由エネルギーの差を量子渦一本のエネルギーとする。そのエネルギーは量子渦の軸方向の長さに比例するので、軸方向の単位長さあたりの量子渦のエネルギーを ϵ_1 と書く。その表式は (98) から Meissner 状態の自由エネルギー ($f = 1, \mathbf{B} = 0$ としたもの) を差し引いて

$$\epsilon_1 = \frac{B_c^2}{\mu_0} \int_{2D} d\mathbf{r} \left[\frac{(1-f^2)^2}{2} - \xi^2 f \nabla^2 f \right] + \int_{2D} d\mathbf{r} \left(\frac{Q^2 f^2}{2\mu_0 \lambda^2} + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} \right) \quad (99)$$

と与えられる。積分は量子渦の軸に垂直な 2 次元面で行う。 ϵ_1 の次元は [エネルギー]/[長さ] である。

下部臨界磁場 B_{c1} は量子渦が入った状態とマイスナー状態のギブスの自由エネルギーが等しくなる磁場である。

ϵ_1 と B_{c1} を具体的に評価するために単一量子渦に対する GL 方程式 (94)、(95) と Ampere 方程式 (97) の解を求めよう。量子渦が原点 $\mathbf{r} = 0$ にあるとし、回転対称性を仮定し $\psi(\mathbf{r}) = f(r)e^{i\chi(\mathbf{r})}$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r)\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = Q(r)\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\mathbf{e}_z, \chi(\mathbf{r}) = m\theta$ とする。 (r, θ, z) は右手系円筒座標系であり、

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta(\mathbf{r}), \sin \theta(\mathbf{r}), 0) \quad (100)$$

$$\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta(\mathbf{r}), \cos \theta(\mathbf{r}), 0) \quad (101)$$

$$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (102)$$

は

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r \quad (103)$$

を満たす。渦度を表す m は一般の整数をとりうるがここでは 1 または -1 の値をとるものとする（多重渦はここでは考えない）。 $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{j}(\mathbf{r})$ は全域で特異性はないものとし、渦中心から離れるとバルクの解（無磁場で空間一様な解）に漸近するものとして

$$f(r \rightarrow \infty) = 1, \quad B(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (104)$$

が成り立つものとし、 $r = 0$ 付近では

$$f(r = 0) = 0, \quad j(r = 0) = 0 \quad (105)$$

が成り立つものとする。第二式により $r = 0$ 付近でベクトルポテンシャルのアンペール則の主要項は

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \sim 0 \quad (106)$$

となる。ここで

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA(r)}{dr} \right) + \frac{A(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta^2} = \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA(r)}{dr} \right) - \frac{A(r)}{r^2} \right) \quad (107)$$

が成り立つから、 $r = 0$ 付近で $A(r)$ は r または $1/r$ に比例する。ベクトルポテンシャルは特異性を持たないはずであるから $A(r) \propto r$ となる。 $\nabla \chi$ は $r \neq 0$ で正則であり、 $\nabla \times (\nabla \chi) = 0$ より (97) は

$$\nabla^2 Q = -\frac{f^2(r)Q}{\lambda^2}, \quad r \neq 0 \quad (108)$$

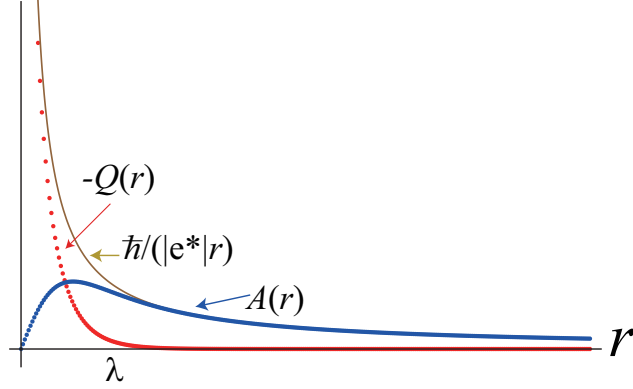


図 1: $\lambda/\xi = 3, m = -1$ のときの $A(r)$, $Q(r)$ 、 $A(r) - Q(r) = -\hbar/(e^*r)$ の r 依存性。磁場は $+z$ を向く。

あるいは

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dQ(r)}{dr} \right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{f^2(r)}{\lambda^2} \right) Q(r) = 0 \quad (109)$$

と書き表すことができる。 $A(r)$, $-Q(r)$, $A(r) - Q(r)$ の動径分布 (r 依存性) を図 1 に示した。

(104) が成り立つ漸近領域では (109) は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dQ(r)}{dr} \right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) Q(r) = 0 \quad (110)$$

となる。解のうち $r \rightarrow \infty$ でゼロに漸近するものは

$$Q(r) \sim CK_1(r/\lambda) \quad (111)$$

と表される (C は $r = 0$ 付近の振舞いで決まる定数)。 K_1 は変形ベッセル関数であり、変数が大きいところでは指数関数的に減衰する。そのことから

$$A(r) \rightarrow \frac{m\hbar}{e^*r}, \quad r \gg \lambda \quad (112)$$

となる。半径 $R(\gg \lambda)$ の円周上で $\mathbf{A}$ を一周線積分すると、円周に囲まれた円を貫く磁束は

$$\Phi = \oint_{|r|=R} \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_{|r|<R} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{2\pi m\hbar}{e^*} \equiv m\phi_0^* \quad (113)$$

となることがわかる (磁束の量子化)。ここで磁束量子の定義は e^* と同符号になるように与えた。よって負にもなる量である。(111) に戻って定数 C を決める。 $f \sim 1$ かつ $r \ll \lambda$ となる領域 (これが成り立つのは $\xi \ll \lambda$ が成り立つときのみ) で

$$Q(r) \sim \frac{C\lambda}{r} \quad (114)$$

となる。一方 $r \ll \lambda$ では $A(r) \sim A(0) = 0$ であるので、 $|A(r)| \ll |m\phi_0^*/r|$ であるとする

$$Q(r) \sim -\frac{m\hbar}{e^*r} \quad (115)$$

これより

$$C = -\frac{m\hbar}{e^*\lambda} = -\frac{m\phi_0^*}{2\pi\lambda}, \quad \kappa = \lambda/\xi \gg 1 \quad (116)$$

まとめると

$$Q(r) \sim -\frac{m\phi_0^*}{2\pi\lambda} K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad r \gg \xi \quad A(r) \sim \frac{m\phi_0^*}{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{r} - K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right) \quad r \gg \xi \quad (117)$$

となり、これから

$$B(r) \sim \frac{\phi_0^*}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad r \gg \xi \quad j(r) \sim \frac{\phi_0^*}{2\pi\mu_0\lambda^3} K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad r \gg \xi \quad (118)$$

となる。(118) が、London 方程式

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0\lambda^2} \quad (119)$$

を満たすことは直接確かめることができる。

これ以降、 $\lambda \gg \xi$ の場合の ϵ_1 を London 理論を用いて導く。(99) を

$$\epsilon_1 \sim \int_{|\mathbf{r}| \geq \xi} d\mathbf{r} \left(\frac{\mu_0\lambda^2 \mathbf{j}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} \right) \quad (120)$$

と近似し、 $|\mathbf{r}| \geq \xi$ が成り立つ領域で、London 方程式が成り立つとする。(29) で $\mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{B}$, $\mathbf{D} = \mathbf{B}$ と置くと

$$(\nabla \times \mathbf{B})^2 = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) \quad (121)$$

を得る。Ampere 則を用いると

$$\mu_0^2 \mathbf{j}^2 = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) + \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{j}) \quad (122)$$

これと London 方程式を用いると

$$\mu_0^2 \mathbf{j}^2 = -\frac{\mathbf{B}^2}{\lambda^2} + \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{j}) \quad (123)$$

これを (120) に代入して、2 次元面積分を円周上の積分に直す。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &\sim \frac{\lambda^2}{2} \int_{|\mathbf{r}| \geq \xi} d\mathbf{r} \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{j}) \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \oint_{|\mathbf{r}|=\xi} d\ell \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (124)$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} \frac{m\phi_0^*}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \frac{m\phi_0^*}{2\pi\mu_0\lambda^3} K_1\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \times 2\pi\xi \quad (125)$$

$$\sim \frac{(\phi_0^*)^2}{4\pi\lambda^2\mu_0} \left(\frac{\xi}{\lambda}\right) K_0\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) K_1\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \sim \frac{(\phi_0^*)^2}{4\pi\lambda^2\mu_0} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) + O(1) \quad (126)$$

$\mathbf{n}$ は円周 $\mathbf{r} = \xi$ の上の外向き法線ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ である。 $d\ell$ は円周上の線素。 ϵ_1 は磁束量子一本があるときの状態とマイスナー状態のヘルムホルツ自由エネルギー差（磁場方向単位長さあたり）になる。 $\mu_0 H = B_{c1}$ を

磁束量子一本があるときの状態とマイスナー状態のギブスの自由エネルギーが等しくなる磁場であるとする。
磁束量子が一本あるとき

$$-\int_{2D} d\mathbf{r} B H = -\phi_0 H \quad (127)$$

であり、マイスナー状態 ($B = 0$) では $-\int_{2D} d\mathbf{r} B H = 0$ だから

$$G(\text{磁束が一本ある状態}) - G(\text{マイスナー状態}) = \epsilon_1 - \phi_0^* H \quad (128)$$

となり、

$$B_{c1} = \frac{\mu_0 \epsilon_1}{\phi_0^*} = \frac{\phi_0^*}{4\pi\lambda^2} \left(\ln \frac{\lambda}{\xi} + O(1) \right) \quad (129)$$

1.7 磁束量子間の相互作用

1.8 電流と磁束量子の相互作用

2 Josephson 効果