2016年度Aセメスター　電磁気学B（担当：加藤雄介）
レポート問題II 解答例 2016.12.21 (文責：福井)

第1問

(1) 原点にある電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}'$ が位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}'}{r^3}\right) \tag{1}$$

である. 双極子 p' から点電荷 $+q$ への位置ベクトルは, x 方向への位置ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$ とすると

$$\left(l - \frac{d}{2}\right)\boldsymbol{e}_x \tag{2}$$

なので, $\boldsymbol{p}' = p'\boldsymbol{e}_x$ より p' が点電荷 $+q$ の位置につくる電場 $\boldsymbol{E}_+$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_+ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3p'(l-d/2)^2}{(l-d/2)^5}\boldsymbol{e}_x - \frac{p'}{(l-d/2)^3}\boldsymbol{e}_x\right] &(3)\\ &= \frac{p'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(l-d/2)^3}\boldsymbol{e}_x &(4)\end{aligned}$$

である. 同様に, 双極子 p' から点電荷 $-q$ への位置ベクトルは

$$\left(l + \frac{d}{2}\right)\boldsymbol{e}_x \tag{5}$$

なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3p'(l+d/2)^2}{(l+d/2)^5} - \frac{p'}{(l+d/2)^3}\right]\boldsymbol{e}_x &(6)\\ &= \frac{p'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(l+d/2)^3}\boldsymbol{e}_x &(7)\end{aligned}$$

となる.

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_+ &= +q\boldsymbol{E}_+ &(8)\\ &= \frac{p'q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(l-d/2)^3}\boldsymbol{e}_x, &(9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_- &= -q\boldsymbol{E}_- &(10)\\ &= -\frac{p'q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(l+d/2)^3}\boldsymbol{e}_x &(11)\end{aligned}$$

なので, 合力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- &(12)\\ &= \frac{p'q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(l-d/2)^3} - \frac{1}{(l+d/2)^3}\right]\boldsymbol{e}_x &(13)\end{aligned}$$

である.

(3) $|x| \ll 1$ のとき, Taylor 展開して x の 2 次以上の項を無視すると

$$(1 \pm x)^{-3} \simeq 1 \mp 3x \tag{14}$$

となるので

$$\left(l \mp \frac{d}{2}\right)^{-3} = l^{-3}\left(1 \mp \frac{d}{2l}\right)^{-3} \tag{15}$$

$$\simeq l^{-3}\left(1 \pm \frac{3d}{2l}\right) \tag{16}$$

を用いると

$$\boldsymbol{F} = \frac{p'q}{2\pi\epsilon_0 l^3}\left[\left(1 + \frac{3d}{2l}\right) - \left(1 - \frac{3d}{2l}\right)\right]\boldsymbol{e}_x \tag{17}$$

$$= \frac{3p'qd}{2\pi\varepsilon_0 l^4}\boldsymbol{e}_x \tag{18}$$

$$= \frac{3pp'}{2\pi\varepsilon_0 l^4}\boldsymbol{e}_x \quad (p = qd\ \text{を用いた}) \tag{19}$$

となり, 斥力が働くことが分かる.

第 2 問

(1) 点電荷 $+q$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_+$ は

$$\boldsymbol{r}_+ = \begin{pmatrix} -d/2 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

なので,

$$\boldsymbol{p'} \cdot \boldsymbol{r}_+ = \begin{pmatrix} p' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d/2 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} = -p'd/2 \tag{21}$$

であり, これを用いると

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3p'd/2}{(l^2 + (d/2)^2)^{5/2}}\begin{pmatrix} -d/2 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{p'}{(l^2 + (d/2)^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{22}$$

であり, 同様に

$$\boldsymbol{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+3p'd/2}{(l^2 + (d/2)^2)^{5/2}}\begin{pmatrix} +d/2 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{p'}{(l^2 + (d/2)^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{23}$$

である.

(2) (1) より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_+ &= +q\boldsymbol{E}_+ && (24)\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3p'd/2}{(l^2+(d/2)^2)^{5/2}}\begin{pmatrix}-d/2\\ l\\ 0\end{pmatrix} - \frac{p'}{(l^2+(d/2)^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right], && (25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_- &= -q\boldsymbol{E}_- && (26)\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+3p'd/2}{(l^2+(d/2)^2)^{5/2}}\begin{pmatrix}+d/2\\ l\\ 0\end{pmatrix} - \frac{p'}{(l^2+(d/2)^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] && (27)
\end{aligned}
$$

なので, 合力は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- && (28)\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3p'd/2}{(l^2+(d/2)^2)^{5/2}}\begin{pmatrix}-d/2+d/2\\ l+l\\ 0\end{pmatrix} && (29)\\
&= -\frac{3p'qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{(l^2+(d/2)^2)^{5/2}}\boldsymbol{e}_y && (30)
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\boldsymbol{e}_y = (0,1,0)$ は y 方向の単位ベクトルである.

(3) $|x| \ll 1$ のとき Taylor 展開して x の 2 次以上を無視すると

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)^{-5/2} &= 1 - 5x(1+x^2)^{-7/2}\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left[-5(1+x^2)^{-7/2} + 35x^2(1+x^2)^{-9/2}\right]\Big|_{x=0} x^2 + \cdots && (31)\\
&= 1 - \frac{5}{2}x^2 + \cdots && (32)\\
&\simeq 1 && (33)
\end{aligned}
$$

となるので, 微小量 $d/(2l)'$ の 2 次以上の項を無視すると

$$
\begin{aligned}
\left(l^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{-5/2} &= l^{-5}\left(1+\left(\frac{d}{2l}\right)^2\right)^{-5/2} && (34)\\
&\simeq l^{-5} && (35)
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
\boldsymbol{F} \simeq -\frac{3pp'}{4\pi\varepsilon_0 l^4}\boldsymbol{e}_y \quad (p = qd \text{ を用いた}) \tag{36}
$$

となり, 第 1 問とは異なり引力が働くことが分かる.

第３問

(1) r 方向の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{37}$$

より, 電場の r 方向成分は

$$\begin{aligned}
E_r = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) - \frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) && (38)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3pr\cos\theta}{r^5}\frac{r^2}{r} - \frac{pr\cos\theta}{r^4}\right) && (39)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} && (40)\\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3} && (41)
\end{aligned}$$

である.

また, 図 1 より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_\theta &= p\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) && (42)\\
&= p\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}\right) && (43)\\
&= -p\sin\theta, && (44)\\
\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_\theta &= 0 && (45)
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
E_\theta = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_\theta &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_\theta\right) && (46)\\
&= +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} && (47)
\end{aligned}$$

である.

(2) 無限遠点から $\boldsymbol{r}$ まで, r 方向向きの積分路に沿って線積分を行う.

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{+\infty}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') && (48)\\
&= \int_{+\infty}^{r} \mathrm{d}r'\ E_r(r') && (49)\\
&= -\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\int_{+\infty}^{r}\mathrm{d}r'\ \frac{1}{r'^3} && (50)\\
&- \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r'^2}\right]_{+\infty}^{r} && (51)\\
&= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad\left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right). && (52)
\end{aligned}$$

(3) A, B, C, D にある双極子モーメントが原点 O につくる電場の r, θ 方向成分はそれぞれ（$r = a$, $\theta = \pi/2$ より）

$$E_r = 0 \tag{53}$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \tag{54}$$

である．図 2 に例として点 A にある双極子を原点とした極座標での点 O を示した．図より，このとき $(\theta = \pi/2)$ の θ 方向は直交座標系 z 方向なので, A, B, C, D の双極子が原点 O に作る電場は直交座標表示で

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ABCD}} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{e}_z \times 4 \tag{55}$$

$$= -\frac{p}{\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{e}_z \tag{56}$$

である.

(4) 点 E の双極子が点 O に作る電場は $r = a, \theta = \pi$ より

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-p}{a^3} \tag{57}$$

$$E_\theta = 0 \tag{58}$$

であり, $-z$ 向きである．点 F の双極子が点 O に作る電場は $r = a, \theta = 0$ より

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{a^3} \tag{59}$$

$$E_\theta = 0 \tag{60}$$

であり, $+z$ 向きである．従って, E と F の双極子が O に作る合成電場は直交座標系で

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{EF}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-p}{a^3}(-\boldsymbol{e}_z) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{a^3}\boldsymbol{e}_z \tag{61}$$

$$= \frac{p}{\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{e}_z \tag{62}$$

である．よって, (3) の結果と合わせると A, B, C, D, E, F にある双極子が原点 O に作る電場は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ABCDEF}} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

となる.

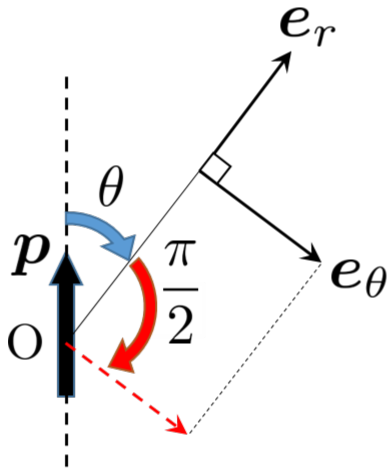

図 1: $\boldsymbol{e}_\theta$ の方向

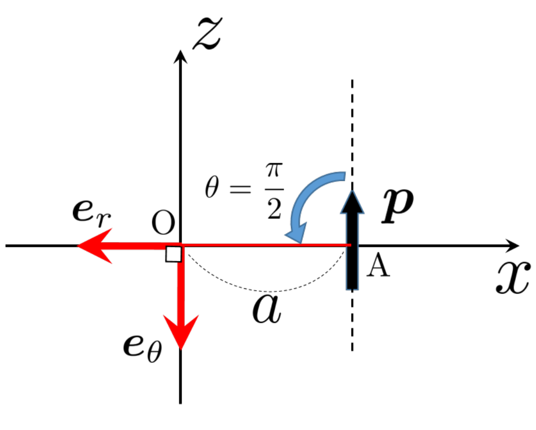

図 2: 点 A を原点とする極座標で見た点 O