問題解答

TA 寒川崇生

2017 年 7 月 19 日

1

典型的なコリオリ力の問題。類似問題を掲載しているテキストも多いのではないかと思う。ガリレイ変換と微分方程式を解くということが順序の交換可能ではないという点に気づかず困って質問される学生がいたのでこの問題の解答の最後に注をつけておく。

1.1

1.2

地点 O の静止系での運動方程式は以下のようになる。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{1}$$

この系では $\boldsymbol{\omega}$ は時間依存しないので、第 2 項は 0。また、$\boldsymbol{\omega}$ が考える時間スケールと比較して十分小さいとき遠心力も 0 としてよい ($*$ 問題文には無視せよと記載)。$\boldsymbol{\omega} = (-\omega, 0, 0)$ に注意してこの運動方程式を成分ごとに書き下すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} =& 0 \\ m\ddot{y} =& -2m\omega\dot{z} \\ m\ddot{z} =& -mg + 2m\omega\dot{y} \end{aligned} \tag{2}$$

x 成分の運動方程式と初期条件を組み合わせると、x は恒等的に 0。

1.3

等速度運動解は上の運動方程式において各成分とも加速度が 0 を考えればよいので

$$\begin{aligned} 0 =& -2m\omega\dot{z}_c \\ 0 =& -mg + 2m\omega\dot{y}_c \end{aligned} \tag{3}$$

よってこれを解くと

$$\begin{aligned} \dot{z}_c =& 0 \\ \dot{y}_c =& \frac{g}{2\omega} \end{aligned} \tag{4}$$

1.4

問題文に与えられた以下の式

$$(\dot{y}_(t), \dot{z}(t)) = (\dot{y}_c, \dot{z}_c) + A(\cos(\Omega t + \phi), \sin(\Omega t + \phi)) \tag{5}$$

を運動方程式に代入すれば $\Omega = 2\omega$ のとき、運動方程式を満たすことが分かる。$(\dot{y}_(t), \dot{z}(t))$ に対する初期条件から以下の連立方程式ができる。

$$\begin{aligned} \frac{g}{2\omega} + A\cos\phi =& 0 \\ A\sin\phi =& 0 \end{aligned} \tag{6}$$

これを解くと $(A, \phi) = (g/2\omega, \pi), (-g/2\omega, 0)$ の 2 解を得るが (* ϕ を 0 から 2π に制限した)、どちらの場合も以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) =& \frac{g}{2\omega} - \frac{g}{2\omega}\cos(2\omega t) \\ \dot{z}(t) =& -\frac{g}{2\omega}\cos(2\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

1.5

$(\dot{y}(t), \dot{z}(t))$ を積分して初期条件を満たすように定数を決めるだけ。(省略)

1.6

$\sin, \cos$ をテイラー展開すればよい。テイラー展開に慣れていないものは復習しておくとよい (以降必修科目でも必須)。簡単なものいくつかは暗記しておくとよい。

$$\begin{aligned} y(t) \simeq& \frac{gt}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\left(2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{6}\right) = \frac{g\omega t^3}{3} \\ z(t) \simeq& h + \frac{g}{4\omega^2}\left(1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} - 1\right) = h - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

1.7

z が 0 になる t を y に代入すると

$$y(t = \sqrt{2h/g}) = \frac{(2h)^{3/2}\omega}{3\sqrt{g}} \tag{9}$$

1.8　注

ガリレイ変換と微分方程式を解くこと、これは可換ではない (順序の入れ替えに対して不変ではない)。ある時刻 t におけるガリレイ変換を $G(t)$(行列のようなものと思って問題ない) とする。これによって S 系 (この系で座標を $\boldsymbol{r}(t)$ とおく。) から S' 系 (同様に $\boldsymbol{r}'(t)$) に移り変わるとする。

$$G(t)\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t) \tag{10}$$

運動方程式は $\boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{r}'$ についての 2 回の微分方程式になっているが例えば以下のようなものを見てみると微分方程式を解くこととガリレイ変換が可換でないことがわかる。

$$\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\ddot{\boldsymbol{r}}'(\tilde{t}) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}G(\tilde{t})\ddot{\boldsymbol{r}}(\tilde{t}) \neq G(t)\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\ddot{\boldsymbol{r}}(\tilde{t}) \tag{11}$$

2

実体振り子の一種と考えればいいので、類似問題は様々な参考書にあたれば必ずあると思われる。

2.1

固定軸からの距離 x にある微小区間 dx(質量 Mdx/L) の慣性モーメントの足し合わせ (積分) を考えればよい。以下同様の積分の考え方を多様する。(微小区間で考えて積分するという考え方は電磁気学でも必須なので慣れておく必要がある。)

$$I = \int_0^{L-l} x^2 \frac{M}{L} dx + \int_0^{l} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{3L}\left(l^3 + (L-l)^3\right) \tag{12}$$

2.2

これもやはり微小区間に働くモーメント $(xMgdx \sin\theta/L)$ の積分をすればいい。

$$N = -\int_0^{L-l} (xMg\sin\theta/L)dx + \int_0^{l} (xMg\sin\theta/L)dx = -\frac{Mg\sin\theta(L-2l)}{2} \tag{13}$$

2.3

回転の運動方程式そのもの。

$$\ddot{\theta} = N/I = -\frac{Mg\sin\theta(L-2l)}{2I} \tag{14}$$

2.4

位置エネルギーを $V(t)$、運動エネルギーを $K(t)$ とする。これらの和の時間微分がゼロであることを示せばよい。まず V とその時間微分は $\theta = 0$ を位置エネルギーの基準とすると以下のようになる。

$$\begin{aligned} V =& \int_0^{L-l} \frac{Mg(1-\cos\theta)x}{L} dx - \int_0^{l} \frac{Mg(1-\cos\theta)x}{L} dx \\ =& \frac{Mg(L-2l)(1-\cos\theta)}{2} \\ \dot{V} =& \frac{Mg(L-2l)\dot{\theta}(\sin\theta)}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

同様に K とその時間微分を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}K =&\int_0^{L-l}\frac{1}{2}\frac{M}{L}(x\dot{\theta})^2dx+\int_0^{l}\frac{1}{2}\frac{M}{L}(x\dot{\theta})^2dx\\ =&\frac{I}{2}\dot{\theta}^2\\ \dot{K} =&I\dot{\theta}\ddot{\theta}\end{aligned} \tag{16}$$

先ほどの問題の $\ddot{\theta}$ を $\dot{K}$ に代入すれば $\dot{K}=-\dot{V}$ であることがわかる。

2.5

$\theta=0$ となる t を α とする。力学的エネルギーは保存するので、$[K(t=0)+V(t=0)]=[K(t=\alpha)+V(t=\alpha)]$ が成立するが、V の定義と初期条件より $K(t=0)=V(t=\alpha)=0$ であるので、

$$\begin{aligned}V(t=0) =&K(t=\alpha)\\ \Leftrightarrow \frac{Mg(L-2l)}{2}(1-\cos\theta_0) =&\frac{I}{2}\dot{\theta}(t=\alpha)^2\end{aligned} \tag{17}$$

よって

$$|\dot{\theta}(t=\alpha)|=\sqrt{\frac{Mg(L-2l)}{I}(1-\cos\theta_0)} \tag{18}$$

2.6

再度運動方程式に立ち返って考える。初期角度が小さいとき $=\theta\simeq\sin\theta$ なので運動方程式から

$$\ddot{\theta}=-\frac{Mg(L-2l)}{2I}\theta \tag{19}$$

と得る。また微小振動のとき水平方向の変位と θ は比例関係にある。(受験に出てくる普通の振り子の問題と同じ。) これから微小振動の振動数 (とそこから求められる周期) は

$$\begin{aligned}\omega =&\sqrt{\frac{Mg(L-2l)}{2I}}\\ T =&2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\frac{2I}{Mg(L-2l)}}\end{aligned} \tag{20}$$

慣性モーメントの微分を忘れてしまうと答えが出ないので注意。

2.7

問題文の条件を満たすには周期 (もしくは振動数) の l の 1 回微分が 0 であればよい。($l\to l+\Delta l$ として Δl についてテイラー展開した係数が 0 としてもよい。両者は同じ結果を与える。) 微分の際に慣性モーメント I にも l 依存があることを忘れないようにしなければならない。少々煩雑だが大学受験程度の微分なので詳細は割愛し、最終結果を書くと、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl}\omega =&0\\ \Leftrightarrow 6l^2-6Ll+L^2 =&0\end{aligned} \tag{21}$$

となり、これを満たすのは $l=(3-\sqrt{3})L/6$ であるときがわかる。

3

大きい円筒の中を小さい円筒が滑らずに転がる問題などは多くのテキストに記載されているので、そういった問題を参考に考えるとよいかと思う。

小球の中心から見た小球の角速度を ω、小球と大球にかかる垂直抗力と摩擦をそれぞれ R と F とおく。

(地表から見た) 小球中心と大球の中心を結ぶ方向の小球の運動方程式は

$$Mg\cos\theta - R = M(a+b)\dot{\theta}^2 \tag{22}$$

となる。それと垂直な方向の小球の運動方程式は

$$Mg\sin\theta - F = -M(a+b)\ddot{\theta} \tag{23}$$

となる。小球の中心から見た小球の回転の運動方程式は

$$\frac{2}{5}Mb^2\dot{\omega} = Fb \tag{24}$$

小球と大球の接触点の瞬間的な静止系から見ると小球の中心の速度は $b\omega$ でこれは地表の静止系から見た速度と各瞬間で一致するので、

$$(a+b)\dot{\theta} = b\omega \tag{25}$$

式 (23)、(24)、(25) から F と ω を消去すると

$$(7/5)(a+b)\ddot{\theta} = g\sin\theta \tag{26}$$

この両辺に $\dot{\theta}$ をかけて積分すると

$$(7/10)(a+b)\dot{\theta}^2 = g(1-\cos\theta) \tag{27}$$

を得る。これを式 (22) に入れて整理すると

$$R = \frac{Mg}{7}(17\cos\theta - 10) \tag{28}$$

小球が離れるのは $R=0$ の点なのでそのときの θ は

$$\cos\theta = 10/17 \tag{29}$$

となる。

3.1 注

優秀な学生には必要ないかもしれないが、考えられうる初歩的なミスも指摘しておく。ω の代わりに問題の図にある ϕ を用いて解く場合、例えば式 (25) の代わりに

$$a\theta = b\phi \tag{30}$$

を用いて、式 (24) の代わりに

$$\frac{2}{5}Mb^2\ddot{\phi} = Fb \tag{31}$$

を用いるといった間違いをおかした学生もいるのではないだろうか。後者の式は間違っている。ω の定義に基づくと $\dot{\omega} \neq \ddot{\phi}$ であることに注意しなければならない。それは ω は小球の中心から見た角速度であり、ϕ は地表から見た角度だからである。以下の関係、

$$\omega = \dot{\phi} - \dot{\theta} \tag{32}$$

を用いれば上の解き方と同等の結果が得られる。